
Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava



Modelování přenosu tepla, hmoty a hybnosti
učební text

Milada Kozubková
Tomáš Blejchař
Marian Bojko

Ostrava 2019

Obsah

Obsah.....	2
Seznam použitých označení	5
Předmluva.....	9
1. Hypotéza o kontinuu a fyzikální vlastnosti látek	11
1.1. Hypotéza o kontinuu (spojitém prostředí).....	11
1.2. Metody řešení přenosu tepla, hmoty, hybnosti.....	12
1.3. Vlastnosti pevných látek a tekutin.....	14
1.4. Bezrozměrná kritéria	18
2. Přenos a jeho řešení.....	21
2.1. Definice přenosu.....	21
2.1.1. Konvektivní přenos	21
2.1.2. Difúzní přenos	23
2.1.3. Celkový přenos.....	23
2.1.4. Bilanční rovnice přenosu	23
2.1.5. Okrajové podmínky	24
2.2. Numerické metody řešení.....	26
2.2.1. Diferenční metoda řešení.....	26
2.2.2. Metoda konečných objemů.....	29
2.2.3. Vytvoření geometrie, prvky sítě.....	31
2.2.4. Výběr interpolačního schématu.....	33
2.2.5. Konvergence a residuály	33
2.2.6. Urychlení konvergence.....	34
2.2.7. Relaxace	34
3. Přenos tepla kondukcí	36
3.1. Fourierova rovnice	36
3.2. Rovnice přenosu tepla kondukcí	37
3.3. Okrajové podmínky	38
3.4. Jednorozměrné vedení tepla stacionární.....	39
3.4.1. Analytické řešení.....	39
3.4.2. Numerické řešení.....	41
3.5. Řešení distribuce tepla při nestacionárním přenosu	46
4. Přenos hmoty a hybnosti	49
4.1. Rovnice kontinuity	49
4.2. Navierova-Stokesova (momentová, pohybová) rovnice	49
4.3. Okrajové podmínky na průtočných hranicích a stěnách	52
5. Přenos tepla kondukcí a konvekcí při laminárním proudění	54
5.1. Rovnice energie.....	54
5.2. Matematický model laminárního proudění s kondukcí a konvekcí.....	55
5.3. Okrajové podmínky při laminárním proudění s kondukcí a konvekcí	55
5.3.1. Okrajové podmínky na hranici oblasti - tenká stěna	58
5.3.2. Okrajové podmínky na tenké dvoustranné stěně.....	59
5.4. Součinitel přestupu tepla	60
5.5. Přestup tepla při obtékání desky	60
6. Turbulence.....	68
6.1. Reynoldsovo časové středování	69
6.2. k - ε dvourovnicový model turbulence.....	70
6.3. Okrajové podmínky pro k - ε turbulentní model	72
6.3.1. Turbulentní veličiny na hranici	72
6.3.2. Varianty turbulentních okrajových podmínek	73
6.3.3. Okrajové podmínky	74

6.4. Stěnové funkce, možnosti zpřesnění výpočtu	74
6.5. Vliv kvality sítě na volbu stěnové funkce pro různé modely turbulence	77
6.6. Výběr turbulentního modelu pro zpřesnění výpočtu	78
6.7. Obtékání trubky v příčném směru	79
6.7.1. Obtékání trubky – teorie, měření.....	79
6.7.2. Obtékání trubky – numerické řešení.....	81
6.7.3. Obtékání dvou trubek	84
7. Přenos tepla kondukcí a konvekcí při turbulentním proudění	87
7.1. Rovnice energie při turbulentním proudění.....	87
7.2. Matematický model turbulentního proudění s konvekcí a kondukcí	87
7.3. Okrajové podmínky	87
7.4. Přenos tepla při turbulentním obtékání desky	88
7.5. Obtékání trubky s přestupem tepla (bez proudění uvnitř)	94
7.6. Obtékání trubky s přestupem tepla (s prouděním uvnitř)	100
7.7. Proudění napříč svazkem trubek s přestupem tepla	101
7.7.1. Uspořádání svazku trubek za sebou - numerická simulace	104
7.7.2. Uspořádání svazku trubek křížem - numerická simulace.....	110
8. Analýza výměníků tepla.....	115
8.1. Základní typy výměníků a jejich popis	116
8.1.1. Výměník typu tekutina-tekutina - trubkový	116
8.1.2. Voštinové výměníky.....	119
8.1.3. Deskové výměníky	121
8.2. Tepelný výkon a tlaková ztráta výměníku.....	123
8.2.1. Tepelný výkon.....	123
8.2.2. Tlaková ztráta.....	126
8.3. Metody tepelného výpočtu výměníku	127
8.3.1. Metoda ϵ -NTU	127
8.3.2. Metoda P-NTU	128
8.3.3. Metoda MTD.....	129
8.4. Řešení souproudého a protiproudého výměníku	131
8.4.1. Fyzikální vlastnosti plynů (kinetická teorie)	131
8.4.2. Souproudý výměník voda-voda.....	132
8.4.3. Protiproudý výměník voda-voda	138
8.4.4. Souproudý výměník voda-vzduch	141
8.4.5. Souproudý výměník vzduch-voda-vzduch	145
9. Časově závislé řešení.....	149
9.1. Diskretizace časově závislé rovnice	150
9.2. Okrajové podmínky	152
9.2.1. Tabulka pro časovou okrajovou podmínku	152
9.2.2. UDF pro okrajovou podmínku	154
9.3. Vyhodnocení časově závislé úlohy	155
10. Optimalizace (adjungovaný řešič).....	160
10.1. Použití modulu adjungovaného řešiče.....	160
10.2. Omezení použití adjungovaného řešiče.....	161
10.3. Aplikace	162
10.3.1. Snížení tlakové ztráty 180° kolena	162
10.3.2. Aplikace na obtékání válce.....	166
11. Vícefázové proudění.....	169
11.1. Specifikace vícefázových materiálů	169
11.2. Mixture model	171
11.2.1. Rovnice kontinuity pro směs	171
11.2.2. Rovnice zachování hybnost.....	172
11.2.3. Proudění směsi za schodem.....	172
11.3. Matematické modelování hydraulického rázu.....	174

11.3.1. Jednorozměrná analýza - Matlab - SimHydraulics.....	175
11.3.1. Vícefázová analýza - Fluent	175
11.3.2. Experiment	175
12. Kavitace.....	180
12.1. Rayleigh -Plessetova teorie	180
12.2. Schnerr and Sauer kavitační model	181
12.3. Kavitace v dýze	182
12.3.1. Popis experimentu	182
12.3.1. Výsledky.....	183
13. Příloha	185
13.1. Vektory a skaláry.....	185
13.2. Souřadné systémy.....	187
13.3. Pole rychlosti a zrychlení	188
13.4. Výpočet tepelného výměníku voda-vzduch	189
13.4.1. Výpočet reálného stavu	193
13.4.2. Výpočet modifikovaného výměníku	199
13.5. Výpočet spirálového souproudého a protiproudého výměníku tepla	203
13.5.1. Transportní rovnice pro přenos příměsí.....	205
13.5.2. Fyzikální vlastnosti směsi plynů, vody a pevných materiálů	206
13.5.3. Spirálový souproudý výměník tepla – ohřev vody vzduchem	208
13.5.4. Spirálový souproudý výměník tepla – ohřev vody vzduchem	215
13.5.5. Protiproudý a souproudý spirálový výměník tepla k ochlazení vody vzduchem	218
Literatura	223

Seznam použitých označení

Poznámka: označení, u něhož není uveden rozměr, reprezentuje obecnou proměnnou.

a	teplotní vodivost	$[\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}]$
\vec{a}	obecný vektor	
A, S	plocha	$[\text{m}^2]$
A, A_i	konstanta	[1]
C_D	konstanta	[1]
C_v	empirická konstanta	[1]
C_μ	konstanta	[1]
C_1, C_2, C	konstanta	[1]
c_v	měrná tepelná kapacita při konstantním objemu	$[\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]$
c_p	měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku	$[\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]$
d_h	hydraulický průměr	[m]
f	frekvence	$[\text{s}^{-1}]$
f	konstanta	[1]
\vec{F}	síla	[N]
E	měrná energie	$[\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}]$
E	empirická konstanta	[1]
Gr	Grashofovo číslo	[1]
g	tíhové zrychlení	$[\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$
h	statická entalpie	$[\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}]$
h	výška	[m]
l	intenzita turbulence	[%]
k	turbulentní kinetická energie	$[\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}]$
k_p	turbulentní kinetická energie v logaritické vrstvě	$[\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}]$
k	součinitel prostupu tepla	$[\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}]$
L, l	délka	[m]
m	hmotnost	[kg]
Ma	Machovo číslo	[1]
M	molekulová hmotnost	$[\text{kg} \cdot \text{kmol}^{-1}]$

\vec{n}	vektor vnější normály k ploše	[1]
Nu	Nusseltovo číslo	[1]
p	tlak	[Pa]
p_{op}	operační (pracovní) tlak	[Pa]
p_s	statický tlak	[Pa]
P_1, P_2	tepelná účinnost	[1]
Pr	molekulové Prandtlovo číslo	[1]
Pr_t, σ_h	turbulentní Prandtlovo číslo	[1]
q	tepelný tok	[J·m ⁻² ·s ⁻¹]
Q	teplo	[kcal, J]
Q_V	objemový průtok	[m ³ ·s ⁻¹]
Q_m	hmotnostní průtok	[kg·s ⁻¹]
r	měrná plynová konstanta	[J·kg ⁻¹ ·K ⁻¹]
R	univerzální plynová konstanta	[J·kmol ⁻¹ ·K ⁻¹]
R	teplotní odpor	[1]
R	reziduál	
\bar{R}	normalizovaný reziduál	[1]
Re	Reynoldsovo číslo	[1]
Sc	Schmidtovo číslo	[1]
Sh	Strouhalovo číslo	[1]
t	čas	[s]
t	teplota	[°C]
T	absolutní teplota	[K]
\vec{u}	vektor rychlosti	[m·s ⁻¹]
u	střední rychlost	[m·s ⁻¹]
u_i	i-tá složka rychlosti	[m·s ⁻¹]
\bar{u}_i	i-tá složka střední rychlosti	[m·s ⁻¹]
u'_i	i-tá složka fluktuační rychlosti	[m·s ⁻¹]
u^+, u^*	rychlost definovaná stěnovou funkcí	[m·s ⁻¹]
u_τ	třecí rychlost	[m·s ⁻¹]
U	vnitřní energie	[J·kg ⁻¹]

v	střední rychlost	$[\text{m}\cdot\text{s}^{-1}]$
\vec{v}	vektor rychlosti	$[\text{m}\cdot\text{s}^{-1}]$
V	objem	$[\text{m}^3]$
x_i	souřadnice v kartézském systému $[x_1, x_2, x_3]$ nebo $[x, y, z]$	$[\text{m}]$
y	kolmá vzdálenost od stěny	$[\text{m}]$
y^+, y^*	bezrozměrná veličina při odvozování stěnových funkcí	$[1]$
y_v^*	bezrozměrná tloušťka podvrstvy	$[1]$
y_v	tloušťka vazké podvrstvy	$[\text{m}]$
Δy_P	vzdálenost bodu P od stěny ve směru normály	$[\text{m}]$
α	relaxační faktor	$[1]$
α	součinitel přestupu tepla	$[\text{W}\cdot\text{m}^{-2}]$
$\tilde{\alpha}$	odhad součinitele přestupu tepla	$[\text{W}\cdot\text{m}^{-2}]$
β	součinitel teplotní roztažnosti	$[\text{K}^{-1}]$
$\overset{=}{\delta}$	Kroneckerovo delta-tenzor	$[1]$
ε	účinnost	$[1]$
ε	rychlost disipace	$[\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}]$
ε_P	rychlost disipace v logaritmické vrstvě	$[\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}]$
Γ	přenos	
γ	součinitel	$[1]$
κ	von Kármánova konstanta, poměr měrných tepelných kapacit	$[1]$
λ	součinitel tepelné vodivosti	$[\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}]$
η	dynamická viskozita	$[\text{Pa}\cdot\text{s}]$
μ	dynamická viskozita	$[\text{Pa}\cdot\text{s}]$
μ_t	turbulentní viskozita	$[\text{Pa}\cdot\text{s}]$
ν	kinematická viskozita	$[\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}]$
ν_t	turbulentní viskozita	$[\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}]$
$\overset{=}{\Pi}$	celkový tenzor napětí	$[\text{Pa}]$
ρ	hustota	$[\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}]$
σ_k	empirická konstanta	$[1]$
σ_ε	empirická konstanta	$[1]$

σ_h	turbulentní Prandtlovo číslo	[1]
τ	časová perioda	[s]
$\bar{\tau}$	tenzor vazkých napětí	[Pa]
τ	napětí	[Pa]
τ_w	vazké napětí na stěně	[Pa]
τ_t	turbulentní napětí	[Pa]
ζ	obecná proměnná	
ζ'	fluktuaace obecné proměnné	
$\bar{\zeta}$	střední hodnota obecné proměnné	

Indexy:

i	index složky rychlosti
i	sčítací index
C	sumační Einsteinův index
w, e, p	index stěny konečného objemu
<i>W, E, P, N, S, F, B, NB</i>	
<i>ref</i>	index referenčních (vztažných) hodnot
<i>wall</i>	index stěny
<i>s</i>	setrvačný
<i>c</i>	(cool) studený, ohříváný
<i>h</i>	(heat) teplý, ochlazovaný
<i>o</i>	hmotnostní
<i>i, n</i>	index iterace
<i>I</i>	(input) vstup
<i>O</i>	(output) výstup
<i>P</i>	index buňky
<i>P</i>	plošný
<i>s</i>	setrvačný
<i>S</i>	stěna
<i>stat</i>	statický
<i>tot</i>	totální, celkový
<i>L</i>	index řady
<i>T</i>	index sloupce

Předmluva

V současné době je možno zaznamenat intenzivní rozvoj nových oborů a specializací jako je informační technologie, biotechnologie a farmacie, alternativní energie a nanotechnologie. Tyto nové aplikace spolu s tradičními aplikacemi v oblasti výroby energie a jejího využití nás utvrzují v tom, že tradiční disciplína zabývající se přenosem hmoty, hybnosti a tepla je stále aktuální a bude mít význam i v budoucnu. Spojení problému přenosu hmoty a energie a matematického řešení s využitím numerických metod a postupů posouvá kvalitativně využití v praktických aplikacích.

Energetika je v současné době jedno ze strategických odvětví. Energetická koncepce státu je silně závislá na lokálních podmínkách a silně souvisí s potřebami jak ekonomickými tak i potřebami obyvatelstva. V našich geografických podmínkách, kde možnosti alternativních zdrojů, jako slunce, voda, vítr jsou omezené, je jedinou alternativou ke klasické energetice, založené na spalování paliv plyných, kapalných a tuhých, jaderná energetika. Ve své podstatě je jaderná elektrárna podobná elektrárně uhelné s tím rozdílem, že zdrojem tepla není spalování paliva, ale radioaktivní odpad. Jinými slovy spalovací komora klasické elektrárny je ekvivalentní primární zóně elektrárny jaderné. Další prvky, jako turbína, výměníky, chladicí věže apod. jsou již koncepčně stejné.

Skripta jsou určena především pro posluchače oborů zaměřených na energetiku, jadernou energetiku, ale mohou je využít studenti všech fakult magisterských a doktorských studijních programů, kteří se chtějí seznámit se základy numerického modelování přenosových jevů v tekutině, tj. přenosu hmoty, hybnosti (momentu), tepla, příměsí atd. při laminárním a turbulentním proudění. Předpokládají se základní znalosti z oblasti termomechaniky a mechaniky tekutin. Teorie je rozšířena o oblast vícerozměrných matematických modelů přenosu hmoty, hybnosti a tepla a základy numerického modelování.

Numerické modelování je velmi silným nástrojem při řešení mnoha fyzikálních jevů, jako je laminární, přechodové a turbulentní proudění stlačitelné a nestlačitelné, jednofázové i vícefázové tekutiny v jednoduchých i složitých geometriích, s tím související přenos tepla v tuhých látkách, kapalinách i plynech s uvažováním přirozené i smíšené konvekce a radiace, přenos chemické příměši včetně chemických reakcí.

Matematický model spočívá v definici rovnic popisujících výše uvedené děje. Vzhledem k tomu, že se jedná o děje rovinné dvourozměrné, osově symetrické nebo obecně trojrozměrné a časově závislé, jsou popsány soustavou parciálních diferenciálních rovnic, kterou je nutné řešit numerickými metodami. Jejich využívání je podmíněno rozšířením znalostí z oblasti proudění, turbulence, tepla, numerických metod a výpočetní techniky.

K řešení přenosu tepla je využit komerční programový systém Ansys – Fluent. Úkolem uživatele je sestavit správného výpočtového modelu obsahujícího matematické, fyzikální a technické principy. Uživatel musí bezpečně rozčlenit všechny informace na údaje geometrické (dvourozměrné nebo třírozměrné útvary, topologie) a údaje o působení vnějších sil a fyzikální údaje (informace o proudícím médiu, jeho fyzikálních vlastnostech). Tedy nezastupitelnou úlohou uživatele je znalost hydromechaniky, termomechaniky a dalších věd podle složitosti problému. Matematický model musí být doplněn vstupními údaji v platných normách, které se využijí jako vstupní data pro programový systém. Významnou fází řešení je verifikace výsledků s teoretickými a praktickými poznatky a správná interpretace výsledků pro další použití.

Pokud jde o výpočetní metody, na nichž jsou založeny užívané programy, měl by projektant znát jejich podstatu v rozsahu potřebném pro spolehlivé použití ve standardních případech. U programu Ansys - Fluent je třeba vědět, s jakými tvary konečných objemů se bude pracovat, z toho vyplývá volba hustoty sítě, jaká aproximační schémata bude vhodné použít, u dynamiky mít představu o charakteru časové závislosti jednotlivých veličin a z toho vyplývající velikosti časového kroku, apod.

Jednotlivé kapitoly obsahují část teoretickou a část praktickou, které se podle potřeby prolínají. Teoretická část obsahuje nezbytné pojmy, které budou využity při modelování a jejich vysvětlení bez odvozování, protože to není náplní předmětu. Podrobně jsou specifikovány praktické příklady a jsou zaměřené především na výběr matematických modelů, kvalitní vyhodnocení a na metody verifikace výsledků. Tvorba geometrie a sítě je složitý problém významně ovlivňující výsledky a vyžadoval by speciální kurz. Informativně bude řešen ve cvičeních v aplikacích na jednoduchých oblastech.

Pozn.

Vzhledem k počtu rovnic nebudou za každou rovnicí vysvětleny všechny použité symboly. Pouze v případě nejasností budou tyto symboly uvedeny. Všechny ale jsou v seznamu označení. V označení veličin se mohou vyskytnout jisté nejednotnosti, které jsou způsobené čerpáním podkladů z literatury české a zahraniční. Úplné sjednocení by jistě bylo možné, ale vzhledem k tomu, že tato skripta jsou jen určitým vodítkem pro numerické modelování a jistě bude nutné doplňovat znalosti z doporučené literatury a především manuálu Fluentu, bylo někde ponecháno označení veličin v souladu s tímto manuálem.

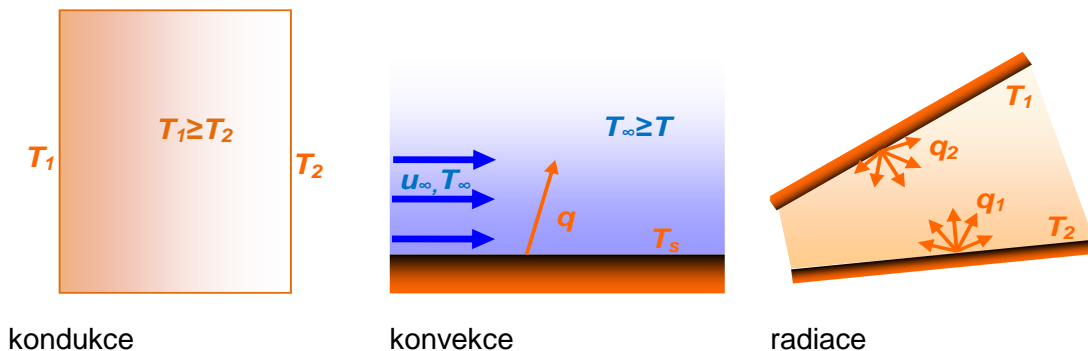
Také zápis čísel je v různých formátech vzhledem k tomu, že některé veličiny a tabulky byly počítány v Excelu a následně kopírovány.

1. Hypotéza o kontinuu a fyzikální vlastnosti látek

Základem termomechaniky je zkoumání přenosu tepla mezi daným systémem s okolím. Tato interakce se nazývá práce a teplo. Avšak termomechanika se musí zabývat procesem, během kterého se přenos tepla uskutečňuje v závislosti na měnících se podmínkách a čase. Tedy budeme se zabývat nejen přenosem tepla a jeho výsledným efektem, ale i rychlostí přenosu.

Co je to přenos tepla? Přenos tepla je změna tepelné energie z důvodu existence teplotní diference. Avšak teplotní diference existuje v rámci jednoho prostředí (médiu) nebo mezi médii. Můžeme diskutovat o třech typech přenosu tepla [2] :

- kondukce, která se objevuje v pevné látce nebo nepohybující se tekutině s teplotním spádem (gradientem)
- konvekce, definovaná mezi povrchem pevné látky a proudící tekutiny, pokud mají odlišné teploty
- radiace, vznikající mezi plochami emitujícími energii ve formě elektromagnetických vln



obr. 1.1 Kondukce, konvekce a radiace [2]

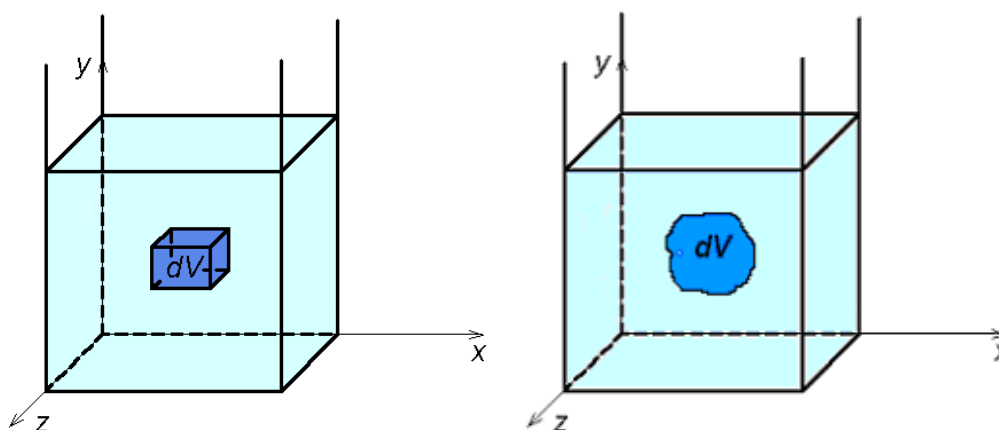
V komplexní souvislosti je nutné se zabývat nejen přenosem tepla, ale také přenosem hmoty a momentů, tj zabývat se prouděním plynů a kapalin (tekutin).

1.1. Hypotéza o kontinuu (spojitém prostředí)

Každá látka se skládá z molekul, které existují v daném prostředí, mohou se i pohybovat. Toto prostředí se ale neuvažuje jako diskrétní prostředí na úrovni molekul. Tedy má molekulovou strukturu, ale není vždy optimální zahrnout tuto molekulovou strukturu do modelu. Úmyslné vpuštění molekulové struktury je známé jako hypotéza o spojitém prostředí, kdy molekulová struktura tekutin je nahrazena množinou vlastností jako hustota, tlak, teplota a rychlost [4] , které jsou definovány v bodech tekutiny (velmi malých objemech)

a spojitě se mění při přechodu od jednoho k druhému objemu. Tyto vlastnosti jsou tedy popsány spojitými funkcemi polohy a času. Bylo dokázáno, že tento přístup může nahradit v určitém smyslu řešení problému na molekulové úrovni.

Obdobně, jako je v obecné mechanice zaveden pojem hmotného bodu, vystupuje v úlohách přenosu pojem „elementární objem tekutiny a pevné látky“. Je to objem velmi malý proti rozměrům proudu kapaliny, ale dostatečně velký vzhledem ke střední délce volné dráhy molekuly. Lze tedy předpokládat, že pro počet molekul obsažených v tomto objemu platí statistické střední hodnoty kinetické teorie.



obr. 1.1 Elementární objem kapaliny [11]

Pro tento „elementární objem“ budou definovány odvozeny podmínky rovnováhy sil a energie a definovány základní zákony, tj. zákon zachování hmoty, resp. energie.

1.2. Metody řešení přenosu tepla, hmoty, hybnosti

Základní zákony zachování hmoty, hybnosti a energie jsou popsány parciálními diferenciálními rovnicemi, k nimž přistupují okrajové a počáteční podmínky. Jejich analytické řešení je velmi obtížné a je možné pouze pro několik výrazně zjednodušených aplikací. Proto se v současné době používají ve větším měřítku numerické metody.

Numerické modelování obecně mnoha fyzikálních jevů je úzce spojeno s modelováním určité formy pohybu matematickými prostředky. Pohyb tekutin je spojen s řešením nejrůznějších problémů, z nichž lze jmenovat:

- rovinné dvourozměrné proudění, osově symetrické proudění, obecné trojrozměrné proudění
- stacionární, nestacionární a přechodové proudění
- laminární a turbulentní proudění v jednoduchých i složitých geometriích
- stlačitelné a nestlačitelné proudění
- přenos tepla, přirozená a smíšená konvekce, radiace

- přenos chemické příměsi včetně chemických reakcí, hoření
- vícefázové proudění, proudění s volnou hladinou, proudění s pevnými částicemi a bublinami
- proudění porézním prostředím, atd.

Vzhledem k tomu, že se jedná o děje obecně trojrozměrné a časově závislé, jsou popsány soustavou parciálních diferenciálních rovnic, kterou je nutné řešit numerickými metodami. K tomuto účelu jsou dnes k dispozici výkonné CFD (Computational Fluid Dynamics) programové systémy, např. Ansys-Fluent, Ansys-CFX, Fidap, Flow 3D, Rampant, Fluidyn-Panache, atd. Jejich využívání je podmíněno rozšířením znalostí z oblasti proudění, numerických metod, výpočetní techniky. S rozvojem výpočetní techniky se mění požadavky na její uživatele, zejména v oblasti projektování. V poslední době nabyly poznatky vedoucí k správné volbě výpočetního modelu, výpočetní metody a interpretace výsledků, výraznou převahu nad matematickou a programátorskou stránkou řešené problematiky. Ta zůstává vyhrazena špičkovým specialistům v oblasti matematiky a programátorství a problémově orientovaným specialistům firem produkujících software.

Povinností uživatele takových programových systémů je především nutnost sestavit správný výpočtový model, což obsahuje některé matematické, fyzikální a technické principy. Pro takový model je nutné najít všechny vstupní údaje v platných normách, sestavit vstupní data pro program, kterým lze výpočtový model řešit, provést řešení u terminálu, správně interpretovat výsledky pro další použití a ve všech fázích provádět účinné kontroly všech vstupů a výstupů. Uživatel musí bezpečně rozčlenit všechny informace na údaje geometrické (dvourozměrné nebo třírozměrné útvary, topologie), údaje o působení vnějších sil a fyzikální údaje (informace o proudícím médiu, jeho fyzikálních vlastnostech). Tedy nezastupitelnou úlohou uživatele je znalost hydromechaniky, termomechaniky a dalších věd podle složitosti problému.

Pokud jde o výpočetní metodu, je založena na metodě konečných objemů. Uživatel by měl znát jejich podstatu v rozsahu potřebném pro spolehlivé použití ve standardních případech. U programu Fluent je třeba vědět, s jakými tvary konečných objemů se bude pracovat, z toho vyplývá volba hustoty sítě, jaká aproximační schémata bude vhodné použít, u dynamiky mít představu o charakteru časové závislosti jednotlivých veličin a z toho vyplývající velikosti časového kroku, apod. Dále je nezbytné porozumět obecné dikci manuálů, protože bez této pomůcky není možné seriózně zpracovat zadání úlohy. Neméně významnou částí je vyhodnocení výsledků, které je obzvlášť obtížné u trojrozměrných úloh. Je optimální mít k dispozici alespoň orientační hodnoty počítaných veličin, ideální je srovnání výsledků s experimentem. Tento učební text by měl dát návod, jak postupovat při řešení výše uvedených problémů.

1.3. Vlastnosti pevných látek a tekutin

Stav látky nacházející se v rovnováze může být určen **hustotou, teplotou, tlakem a rychlostí**.

Hustota ρ (měrná hmotnost) je rovna poměru hmotnosti elementární částice látky dm k jejímu elementárnímu objemu dV

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad [\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}] \quad (1.3.1)$$

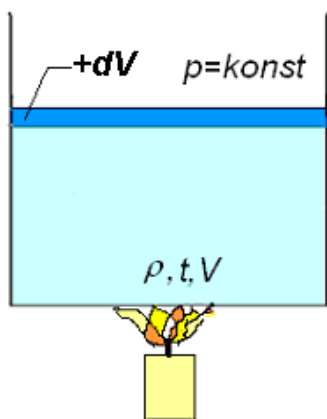
Teplota T je proměnná, která poskytuje informace o vnitřní energii látek. Vyjadřuje se ve stupních Celsia nebo Kelvina.

$$T[\text{K}] = t[^\circ\text{C}] + 273.15 \quad (1.3.2)$$

Teplotní změny v látkách jsou často spojovány s konvekcí nebo kondukcí tepla.

Hustota pevných látek a kapalin se mění s tlakem a teplotou jen nepatrně a ve většině výpočtů bude považována za konstantní $\rho = \textit{konst}$. Přesto mají kapaliny schopnost zmenšovat svůj objem při zvyšování tlaku a tedy může být definována jejich **objemová stlačitelnost**. **Teplotní roztažnost** [11] je schopnost látky zvětšovat při zahřátí svůj objem. Vyjadřuje se součinitelem teplotní roztažnosti β

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\Delta V}{\Delta t} \right)_{p=\textit{konst}} \quad [^\circ\text{C}^{-1}] \quad (1.3.3)$$



obr. 1.2 Teplotní roztažnost kapaliny

Nechť na počátku je v nádobě kapalina o hustotě ρ , teplotě t a objemu V , viz obr. 1.2. Po zahřátí kapaliny je její teplota vyšší o Δt a kapalina zaujímá objem $V_0 = V + \Delta V$. Objem, teplota a hustota kapaliny po zahřátí jsou V_0 , t_0 , ρ_0 . Po dosažení rozdílu objemů a teplot po zahřátí a před zahřátím do rovnice (1.3.4) se dostane vztah (1.3.4), který vyjadřuje změnu objemu kapaliny $\Delta V = V_0 - V$ připadající na jednotku původního objemu V při změně teploty $\Delta t = (t_0 - t)$.

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{V_0 - V}{t_0 - t} = \frac{\Delta V}{V \Delta t} \quad [^\circ\text{C}^{-1}] \quad (1.3.4)$$

Z předcházejících rovnic vyplývá vztah pro objem kapaliny po zahřátí

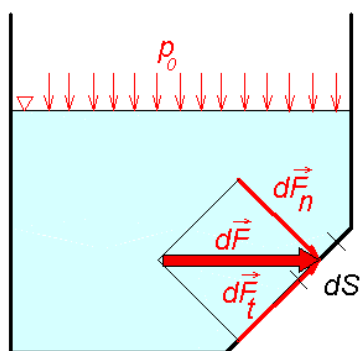
$$V_0 = V + \Delta V = V + \beta V \Delta t = V(1 + \beta \Delta t) \quad [\text{m}^3] \quad (1.3.5)$$

Hustota po zahřátí je dána následující rovnicí

$$\rho_0 = \frac{m}{V_0} = \frac{m}{V(1 + \beta \Delta t)} = \frac{\rho}{(1 + \beta \Delta t)} \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}] \quad (1.3.6)$$

Tlak kapaliny je dán velikostí tlakové síly, působící kolmo na jednotku plochy. Je-li tlaková síla rovnoměrně rozložena, je tlak dán poměrem velikosti síly a plochy

$$p = \frac{|\vec{F}|}{S} \quad \text{resp.} \quad p = \frac{d|\vec{F}|}{dS} \quad [\text{Pa}] \quad (1.3.7)$$



obr. 1.3 Působení tlakových sil na stěnu nádoby

Tlaková síla v hydrostatice působí vždy kolmo na plochu. Toto tvrzení si nyní dokážeme negací, viz obr. 1.3. Kdyby působila na plošku dS síla $d\vec{F}$ nikoliv ve směru normály, dala by se rozložit na složku normálovou a tečnou. Tečná složka síly by si vynutila pohyb částic kapaliny, které nekladou vzájemnému posunutí odpor. Protože tekutina je v klidu, je tečná složka rovna nule a tlaková síla musí působit ve směru normály k ploše.

Hustota plynů a par je funkcí stavových veličin tj. tlaku p a teploty T [K]. Pro její výpočet se bude používat jednoduchá **stavová rovnice ideálního plynu**

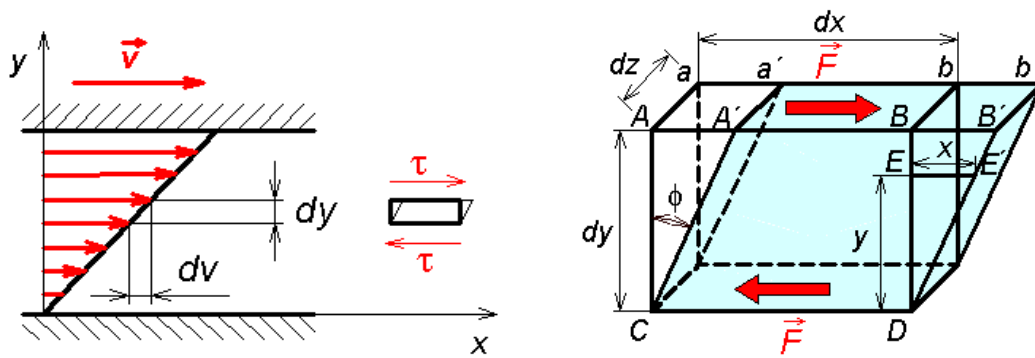
$$pV = mrT \Rightarrow \frac{p}{\rho} = rT \quad (1.3.8)$$

kde r je měrná plynová konstanta [$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$], jejíž velikost závisí na druhu plynu.

Viskozita tekutin se projevuje za pohybu skutečných kapalin. Pohybují-li se sousední vrstvy kapaliny různými rychlostmi, vzniká na jejich rozhraní smykové napětí, které brání pohybu. Pomalejší vrstva je zrychlována a naopak zase rychlejší zbrždována. Tečné (smykové) napětí je vyvoláno vnitřním třením neboli viskozitou tekutiny. Je úměrné změně rychlosti ve směru kolmém na směr pohybu podle Newtonova vztahu

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy} \quad [\text{Pa}] \quad (1.3.9)$$

kde η je dynamická viskozita (vazkost) a $\frac{dv}{dy}$ je gradient rychlosti ve směru kolmém na směr pohybu, viz obr. 1.4. Tuto formulaci uvedl v roce 1687 anglický fyzik Isaac Newton pro laminární proudění. Smykové napětí způsobuje úhlovou deformaci elementárního objemu tekutiny (obr. 1.4).



obr. 1.4 Smykové napětí při laminárním proudění [11]

Jednotka dynamické viskozity η se definuje ze vztahu pro smykové napětí

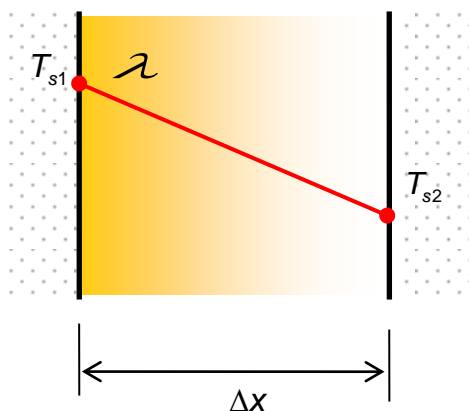
$$[\eta] = \frac{[\tau][y]}{[v]} = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} = \text{Pa} \cdot \text{s}$$

Kinematická viskozita dána podílem dynamické viskozity a hustoty podle vztahu

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad [\nu] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^3}{\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{kg}} = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad (1.3.10)$$

Rozměr kinematické viskozity neobsahuje jednotky hmotnosti ani síly. V praxi je dosud stále důležitá jednotka kinematické viskozity v soustavě technické – Stokes, pro niž platí $1\text{S} = \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1} = 10^{-4} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Teplo Q [J] (nesprávně užívaný termín tepelná energie) [12], [2] je část vnitřní energie, kterou systém vymění (tj. přijme nebo odevzdá) při styku s jiným systémem, aniž by přitom docházelo ke konání práce. Výměna tepla mezi systémy za jednotku času definuje tepelný výkon P [$\text{J} \cdot \text{s}^{-1} = \text{W}$]. Teplo procházející plochou určuje tzv. **tepelný tok**. Hustota tepelného toku (měrný tepelný tok) je množství tepla, které projde plochou za jednotku času.



obr. 1.5 Princip vedení tepla“

Základním zákonem šíření tepla je Fourierův zákon, který udává vztah mezi **tepelným tokem** q a teplotním gradientem $\text{grad } T$:

$$q = \frac{dQ}{dS dt} = \frac{dP}{dS} = -\lambda \nabla T \quad (1.3.11)$$

$[\text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} = \text{W} \cdot \text{m}^{-2}]$

kde λ [$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$] je **tepelná vodivost**, která závisí na druhu materiálu a mění se s teplotou. Záporné znaménko na pravé straně rovnice vyjadřuje skutečnost, že hustota tepelného toku a teplotní gradient mají jako vektory opačný smysl (teplo se šíří

ve směru klesající teploty).

Specifické teplo (měrná tepelná kapacita) pak je definováno jako množství tepelné energie požadované ke zvýšení teploty o $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ množství 1 kg látky.

$$c = \frac{dQ}{m dT} \quad [\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}] \quad (1.3.12)$$

Při přenosu tepla vedením je **teplotní vodivost** definovaná dle **vztahu**

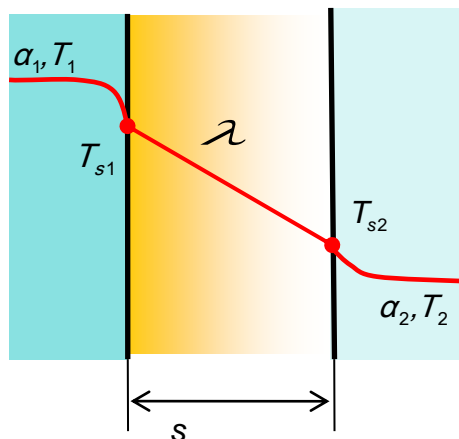
$$a = \frac{\lambda}{c_p \rho} \quad [\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}] \quad (1.3.13)$$

Součinitel přestupu tepla stěnou je veličina definovaná rovnicí

$$\alpha = \frac{q}{T_{wall} - T_{ref}} \quad [\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}] \quad (1.3.14)$$

kde q je kovektivní tok tepla, T_{wall} je teplota stěny a T_{ref} je referenční teplota, která by měla být reprezentativní pro daný problém.

Prostup tepla rovinnou obtékanou stěnou



obr. 1.6 Prostup tepla stěnou

Nejjednodušším případem prostupu tepla je stacionární prostup tepla homogenní neomezenou izotropní rovinnou stěnou [3]. Podmínkou však je, aby se tekutina obklopující stěnu z obou stran výrazněji nepohybovala a nedocházelo tak ke sdílení tepla prouděním. Pro výpočet hustoty tepelného toku v tomto případě platí základní vztah:

$$q = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} (T_2 - T_1) = k(T_2 - T_1) \quad (1.3.15)$$

kde α_1 a α_2 představují součinitele přestupu tepla na rozhraní stěn a tekutiny, T_1 a T_2 představují teploty obou stěn obklopující tekutinu a s je tloušťka stěny.

Tento způsob není možné použít u stěn složených. **Součinitel prostupu tepla k** [$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$] charakterizuje přenos tepla z jedné pracovní látky do druhé přes pevnou překážku. V koeficientu prostupu tepla je zahrnuta tepelná vodivost λ pevných stěn, které oddělují obě tekutiny a dále koeficient přestupu tepla α pro rozhraní mezi pevnou stěnou a oběma tekutinami. Stanovení tepelné vodivosti je relativně snadné, protože je pouze materiálová vlastnost. Koeficient přestupu tepla, jak již bylo řečeno, specifikuje intenzitu přestupu tepla z tekutiny do pevné stěny, a naopak. Tento koeficient je však závislý jak na materiálových vlastnostech proudící tekutiny, tak i na charakteru proudění v okolí pevné stěny.

1.4. Bezrozměrná kritéria

Reynoldsovo číslo (Re) definuje poměr setrvačných a viskózních sil a je určován z okrajových a fyzikálních podmínek jako bezrozměrné kritérium za účelem specifikace laminárního nebo turbulentního proudění. Jeho hodnota charakterizuje proudění v přechodové oblasti mezi laminárním a turbulentním prouděním [3].

$$\text{Re} = \frac{u d_h}{\nu} \quad (1.4.1)$$

kde tzv. hydraulický průměr d_h reprezentuje při proudění v potrubí průměr trubky, při obtékání trubky také její průměr, ν je střední rychlost proudícího média. Při proudění v trubce platí, že pokud je hodnota $\text{Re} < 2320$ jedná se o laminární proudění (částice se pohybují ve vrstvách). Při vyšším $\text{Re} > 2320$ se jedná o turbulentní proudění (částice se víří) [4].

Prandtlovo číslo je poměr viskózní a tepelné difuze, a je pouze závislé na materiálových vlastnostech tekutiny. Vztahuje se k tloušťkám mezních vrstev, referenční rychlosti a teploty.

$$\text{Pr} = \frac{\rho c_p \nu}{\lambda} = \frac{\nu}{a} \quad (1.4.2)$$

Pro vzduch je možno předpokládat jeho hodnotu konstantní 0.7.

Grashofovo číslo je poměr vztlakových a viskózních sil. Jeho hodnota tak udává, zda je při proudění tekutiny významná gravitace, tedy vztlakové členy

$$\text{Gr} = \frac{g \beta (T_s - T_{ref}) d_h^3}{\nu^2} \quad (1.4.3)$$

Fourierovo číslo je poměr vedení tepla k jeho akumulaci v pevném tělese

$$\text{Fo} = \frac{\lambda \tau}{c_p \rho d_h^2} \quad (1.4.4)$$

τ je časová konstanta.

Nusseltovým číslem se vyjadřuje vliv proudění na tepelný tok stěnou, a závisí na geometrickém referenčním parametru (který je dobře definovatelný).

$$\text{Nu} = \frac{\alpha d_h}{\lambda} \quad (1.4.5)$$

Hodnota Nusseltova čísla tak specifikuje poměr konvekce ku kondukcii (přestup ku vedení). Koeficient přestupu tepla, jak již bylo řečeno, specifikuje intenzitu přestupu tepla z tekutiny do pevné stěny, a naopak. Tento koeficient je však závislý jak na materiálových vlastnostech proudící tekutiny, tak i na charakteru proudění v okolí pevné stěny.

Druhá definice Nusseltova čísla obsahuje lépe měřitelné veličiny, jako je tepelný výkon P , charakteristický rozměr d_h , plocha S , na které je určován přestup tepla, teplotní spád mezi teplotou stěny a referenční teplotou okolí $\Delta T = T_s - T_{ref}$. Teplotní spád může být specifikován také jako střední logaritmická diference.

$$Nu = \frac{P d_h}{S \Delta T \lambda} \quad (1.4.6)$$

Koeficient přestupu tepla je možné stanovit na základě celé řady empirických vztahů, a v praxi se nejčastěji využívá teorie podobnosti. Pokud tedy známe hodnotu Nusseltova čísla můžeme určit koeficient přestupu tepla α . Nusseltovo číslo je obecně funkcí dalších podobnostních kritérií

$$Nu = f(Re, Pr, Gr, Fo) \quad (1.4.7)$$

Přestup tepla dělíme na základě vlivu gravitace do dvou režimů:

- **Přirozená (volná) konvekce** - je dominantně řízena vztlakovými silami (gravitací). Proudění tekutiny je pak vyvoláno pouze změnou hustoty (teplá tekutina stoupá, studená klesá)
- **Nucená konvekce** - je dominantně řízena prouděním kapaliny, které je vyvoláno vnějším silovým působením na tekutinu (čerpadlo, ventilátor apod.), která je tak nucena proudit přes výměník a obtékat teplosměnné plochy. Gravitace je v tomto případě zanedbatelná.

V případě nucené konvekce se hodnota Nusseltova čísla určuje v závislosti na hodnotě Re čísla. Existuje řada empirických vztahů pro výpočet Nusseltova čísla v různých jednodušších geometriích [24], viz Tab. 1.1. V odborné literatuře je možné nalézt celou řadu vztahů, pomocí nichž je možné stanovit hodnotu Nusseltova čísla. Tyto rovnice jsou určeny převážně empiricky a mají omezenou platnost pro určité specifické případy. V předchozím textu byl uveden pouze velice stručný výběr nejpoužívanějších vztahů.

Tab. 1.1 Nucená konvekce

laminární proudění kolem desky, T_s je konstantní	$Nu = 0,664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$	$0,6 \leq Pr$
	$Re_L = \frac{uL}{\nu}$, $10^4 \leq Re_L \leq 5 \cdot 10^5$, L délka desky	

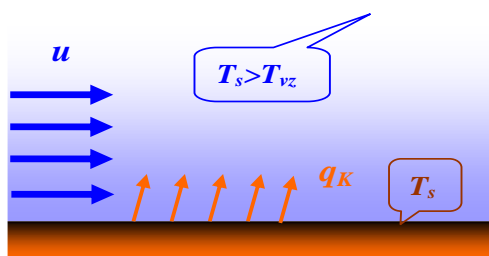
laminární proudění kolem desky, q je konstantní	$Nu = 0,908 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$ $Re_L = \frac{uL}{\nu}$, $10^4 \leq Re_L \leq 5 \cdot 10^5$, L délka desky	$0,6 \leq Pr$	
turbulentní proudění kolem desky, T_s je konstantní	$Nu_x = 0,0405 Re_L^{4/5} Pr^{1/3}$ $5 \cdot 10^5 \leq Re_L \leq 10^8$	$0,6 \leq Pr \leq 60$	
laminární proudění v trubce	$Nu = 4,36$ pro $q = \text{konst.}$ na stěně $Nu = 3,66$ pro $T = \text{konst.}$ na stěně		
turbulentní proudění v trubce	$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^m$, $3 \cdot 10^4 \leq Re_L \leq 10^6$	$m = 0,3$ pro chlazení $m = 0,4$ pro ohřev	
laminární, přechodové a turbulentní příčné obtékání trubky	$Nu = C_1 Re^{C_2} Pr^{0,38}$ Re 0,4 ÷ 4 4 ÷ 40 40 ÷ 4 000 4 000 ÷ 40 000 40 000 ÷ 400 000	C1 0,989 0,911 0,683 0,193 0,0266	C2 0,330 0,385 0,466 0,618 0,805
laminární, přechodové a turbulentní obtékání svazku trubek, N_L je počet trubek	$Nu_D = C_1 Re_{D,\max}^m$ pro $N_L > 10$, $Pr = 0,7$, konstanty C_1 a m jsou dány v tabulce S_L – vodorovná rozteč trubek, S_T – svislá rozteč trubek	$2000 \leq Re_{D,\max}^m \leq 40000$	

Tab. 1.2 Konstanty pro určení Nusseltova čísla při obtékání svazku trubek

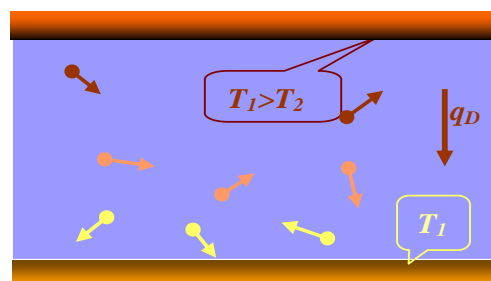
systém přímý	$S_T/D = 1.25$		$S_T/D = 1.50$		$S_T/D = 2.00$		$S_T/D = 3.00$	
	C_1	m	C_1	m	C_1	m	C_1	m
S_L/D								
1.25	0.348	0.592	0.275	0.608	0.100	0.704	0.063	0.752
1.50	0.367	0.586	0.250	0.620	0.101	0.702	0.068	0.744
2.00	0.418	0.570	0.299	0.602	0.229	0.632	0.198	0.648
3.00	0.290	0.601	0.357	0.584	0.374	0.581	0.286	0.608
systém kříž	$S_T/D = 1.25$		$S_T/D = 1.50$		$S_T/D = 2.00$		$S_T/D = 3.00$	
	C_1	m	C_1	m	C_1	m	C_1	m
S_L/D								
1.000			0.497	0.558				
1.125					0.478	0.565	0.518	0.560
1.250	0.518	0.556	0.505	0.554	0.519	0.556	0.522	0.562
1.500	0.451	0.568	0.460	0.562	0.452	0.568	0.488	0.568
2.000	0.404	0.572	0.416	0.568	0.482	0.556	0.449	0.570
3.000	0.310	0.592	0.356	0.580	0.448	0.562	0.482	0.574

2. Přenos a jeho řešení

Pochopení přenosu veličin je základem pro mnoho inženýrských oblastí zahrnujících mechanická zařízení, jako jsou motory, čerpadla a transportní systémy (doprava oleje, chemikálií, potravin atd.), energetické systémy a zařízení [2]. Aby bylo možno počítat přenos hmoty, hybnosti, energie a dalších vlastností a látek plochou, je třeba rozlišovat pohyb tekutiny na úrovni různých délkových měřítek – makroskopická měřítka (částice) a mikroskopická měřítka (molekuly). Při makroskopickém Eulerovském přístupu je nutno určit pole rychlosti. Přenos částic tekutiny přes plochu se nazývá **konvektivní přenos**. Přenos, který je definován na úrovni molekul se nazývá **difúzní přenos**. Konvektivní přenos je nulový, pokud se tekutina nepohybuje, difúzní transport může být nenulový i v klidu, např. existence teplotního gradientu je dána difúzním transportem tepla. Při proudění tekutiny jsou přítomny oba přenosy, ale jeden z nich může významně převyšovat druhý. Např. při turbulentním proudění konvektivní přenos hmoty, hybnosti a energie může být překvapivě velký. Plocha, přes kterou probíhá přenos, může být skutečná stěna ohraničující objem tekutiny, nebo fiktivní, umístěná uvnitř tekutiny. Vnitřní plocha je průtočná. Pro objasnění rozdílu mezi oběma přenosy je na obr. 2.1 a obr. 2.2 zobrazena konvekce tepla ze stěny a difúze (kondukce) tepla mezi dvěma stěnami o různých teplotách.



obr. 2.1 Přenos tepla konvekcí



obr. 2.2 Přenos tepla difúzí

2.1. Definice přenosu

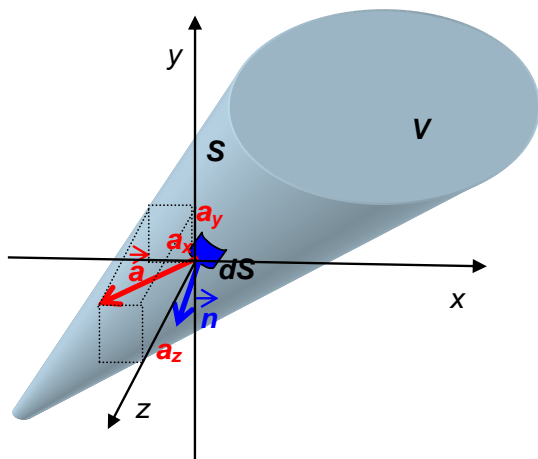
2.1.1. Konvektivní přenos

Přenos Γ_K v určitém bodě průtočné plochy je definován rychlostí, kterou je daná veličina přenášena přes plochu S , v diferenciálním tvaru je definován

$$d\Gamma_K = \zeta \left(\vec{u} \cdot \vec{n} \right) dS \quad (2.1.1)$$

kde ζ obecná veličina (skalár)

- dS velikost elementu plochy
- \vec{n} normálový vektor k elementu plochy dS
- $(\vec{u} \cdot \vec{n})$ vytvoří normálovou složku vektoru rychlosti k ploše dS
- $\zeta \vec{u}$ se nazývá **hustota toku veličiny** ζ .



Konvektivní přenos skalární veličiny ζ plochou S je skalár určený plošným integrálem

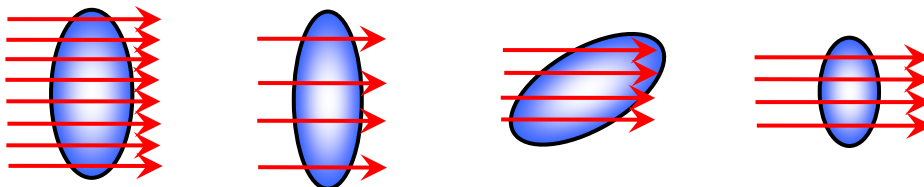
$$\Gamma_{\kappa} = \int_S \zeta (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \quad (2.1.2)$$

Plošný integrál se často nazývá **konvektivní integrál toku** nebo tok. Výsledkem integrálu, tj. konvektivního transportu je veličina o jednotce $\frac{[\zeta]}{s}$

obr. 2.3 Souřadný systém a definice plochy dS (např. objemový a hmotnostní průtok) a

používá se častěji, než **hustota toku** definovaná jednotkou $\frac{[\zeta]}{m^2 \cdot s}$. Tok lze vizualizovat, viz

obr. 2.4. Je úměrný hustotě vektorového pole, mění se s nastavením směru průtočné plochy a její velikosti. Šipky vycházející z plochy jsou zdroje (kladná divergence) a naopak končící na ploše jsou propady (záporná divergence). V případě trojrozměrné oblasti je plocha orientovaná tak, že tok vycházející z oblasti je uvažován jako kladný (ve směru vnější normály) a tok vstupující do oblasti je považován za záporný.



obr. 2.4 Velikost toku v závislosti na hustotě vektorového pole, nastavení směru průtočné plochy a její velikosti.

Pokud se označí entalpie $h = U + \frac{1}{2}(\vec{u})^2$, pak tepelný tok bude obecně definován jako

$$\Gamma_K = \int_S h(\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \quad (2.1.3)$$

Významnou úlohou při přenosu tekutiny je určení **toku hybnosti**, tj. toku vektoru rychlosti plochou, který je definován jako

$$\vec{\Gamma}_K = \int_S \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \quad (2.1.4)$$

V každém bodě plochy má přenos jinou hodnotu.

2.1.2. Difúzní přenos

Difúzní přenos vzniká z mikroskopického pohybu molekul, závisí na orientaci a tvaru plochy a na rozložení vlastnosti v daném bodě. Je užitečné definovat difúzní tok přenosu v daném bodě, který má rozměr transportované veličiny jednotkou plochy za jednotku času. Pro tekutiny jako je vzduch a voda, je vztah mezi tokem a gradientem transportované veličiny modelován lineární závislostí, která je dostatečně přesná pro inženýrské aplikace. Při určování vedení tepla dle Fourierova zákona je např. hustota tepelného toku vektor

$$\vec{q}_D = -\lambda \nabla T \quad (2.1.5)$$

Podobně je tomu pro koncentrace.

Difúzní přenos je analogicky k celkovému konvektivnímu přenosu dán plošným integrálem

$$\Gamma_D = \int_S (\vec{q}_D \cdot \vec{n}) dS \quad (2.1.6)$$

2.1.3. Celkový přenos

Celkový přenos je pak vyjádřen součtem konvektivního a difúzního přenosu

$$\Gamma = \Gamma_K + \Gamma_D \quad (2.1.7)$$

2.1.4. Bilanční rovnice přenosu

Fyzikální zákony popisující přenos jsou zákony zachování hmotnosti, hybnosti, tepla případně dalších skalárních veličin. Jsou vyjádřeny rovnicí energie, Navierovými Stokesovými rovnicemi spolu s rovnicí kontinuity v obecné konzervativní formě a popisují laminární i turbulentní režim proudění.

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho\zeta)}{\partial t} dV + \iint_S (\rho\zeta \vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \iint_S [\alpha_\zeta \nabla \zeta] dS + \iiint_V S_\zeta dV \quad (2.1.8)$$

akumulace + **konvekce** = **difúze** + **zdroj**

kde ζ je proměnná a členy v rovnici jsou postupně konvektivní, difúzní a zdrojový člen, proto se rovnice nazývá také konvekčně - difúzní rovnice.

Tuto rovnici lze vyjádřit v diferenciálním tvaru (obvyklejším v učebnicích hydromechaniky a termomechaniky) následujícím postupem. Využije se divergenční teorém, kterým se plošný integrál ($dV=dx \cdot dy \cdot dz$, $dA=dy \cdot dz$) převede na objemový integrál

$$\iint_S (a_x dydz + a_y dx dz + a_z dx dy) = \iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_V \nabla \cdot \vec{a} dV$$

Rovnice (2.1.8) má tvar

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho\zeta)}{\partial t} dV + \iiint_V \nabla \cdot (\rho \vec{u} \zeta) dV = \iiint_V \nabla \cdot [\alpha_\zeta \nabla \zeta] dV + \iiint_V S_\zeta dV \quad (2.1.9)$$

akumulace + **konvekce** = **difúze** + **zdroj**

Protože rovnice platí pro libovolný integrál aplikovaný na libovolný objem, platí i pro výraz pod integrálem

$$\frac{\partial(\rho\zeta)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \zeta) = \nabla \cdot [\alpha_\zeta \nabla \zeta] + S_\zeta \quad (2.1.10)$$

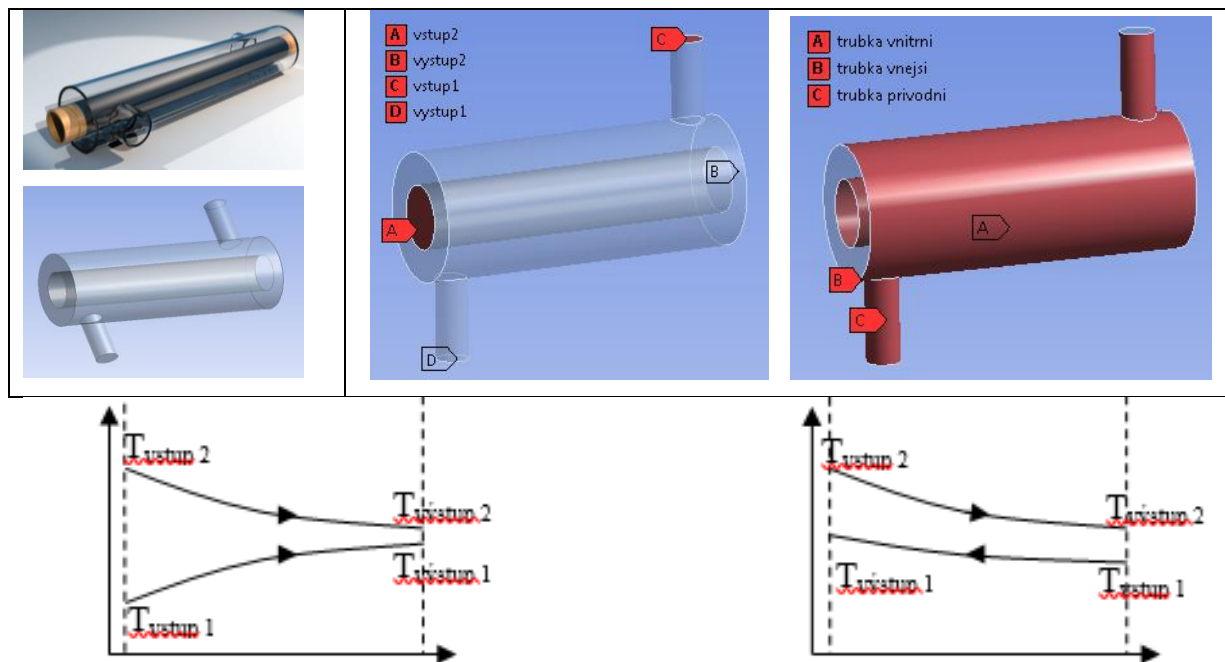
akumulace + **konvekce** = **difúze** + **zdroj**

Pokud ζ představuje teplotu, příměs nebo jinou skalární veličinu, pak se jedná o lineární rovnici druhého řádu, pokud ζ představuje složku rychlosti, jedná se o nelineární rovnici.

Úloha najít řešení rovnice (2.1.10) splňující okrajové i počáteční podmínky se nazývá smíšenou úlohou. Jsou-li okrajové podmínky rovny nule, nazývají se homogenní okrajové podmínky, podobně jsou-li počáteční podmínky rovny nule, nazývají se homogenní počáteční podmínky. Místo okrajových podmínek mohou být dány podmínky jiného typu, které se též nazývají okrajové. Úvaha o okrajových a počátečních podmínkách pro teplotu je platná pro obecnou proměnnou ζ .

2.1.5. Okrajové podmínky

Při modelování proudění s přenosem tepla se definují oblasti, které jsou vyplněny proudící tekutinou nebo tuhým látkou. Oblasti jsou ohraničené průtočnými hranicemi a stěnami. Stěny také mohou oddělovat proudící tekutiny a jsou tedy omývané z obou stran. Na průtočných hranicích a stěnách se zadávají hodnoty stavových veličin (tlak, rychlost, průtok, teplota, tok tepla, atd.) na základě dostupných měření. Typickým příkladem je tubusový výměník, který je v literatuře proměřen a teoreticky zkoumán, viz obr. 2.5.



obr. 2.5 Tubusový výměník, zjednodušená geometrie a typické průběhy teplot pro souprůdný a protiprůdný výměník.

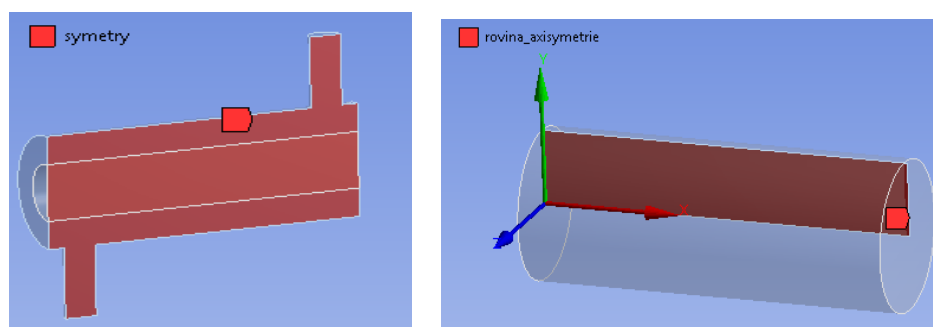
https://cs.wikipedia.org/wiki/Tepelný_výměník#/media/File:Tubular_heat_exchanger.png

Průtočné plochy jsou ve schématu označeny jako vstup1, vstup2, výstup1 a výstup2. Stěny jsou zjednodušeně definovány pouze plochami jako trubka vnitřní, vnější a přírodní, ale mohou být v modelu definovány také reálným objemem (např. trubka tloušťky 3 mm). Ze schématického obrázku lze definovat základní následující okrajové podmínky:

- **průtočné plochy - vstup1, vstup2, výstup1 a výstup2**
- **stěny - trubka vnitřní, trubka vnější, a trubka přírodní**

Z hlediska zjednodušení geometrie je možno uvažovat další významné plochy oblasti, jako je

- **symetrie** (oblast se předpokládá symetrická podle roviny)
- **osová symetrie** (oblast je rotačně symetrická).



obr. 2.6 Tubusový výměník, použití roviny symetrie (vlevo), oblast řešení pro osově symetrickou úlohu (vpravo)

Hodnoty proměnných na hranicích nemusí být jen konstantní, ale mohou nabývat hodnot definovaných funkcí, tabulkou atd.:

- konstanty $y = konst$
- polynomická funkce

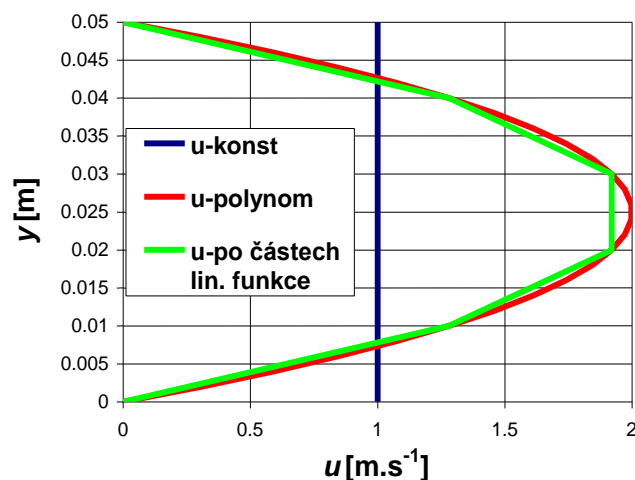
$$y(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots,$$

kde koeficienty se zadávají pouze na pět platných cifer

- derivace podle normály (OUTLET,

$$\text{teplotní tok) } \frac{\partial y(x)}{\partial x} = konst1.$$

- po částech lineární funkce (piecewise linear) $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots (x_N, y_N)$
- kombinace polynom. a po částech lin. funkce



obr. 2.7 Profily rychlostí

2.2. Numerické metody řešení

Cílem numerických metod pro řešení parciálních diferenciálních rovnic je hledat **diskrétní řešení** definované v dostatečně malých podoblastech základní oblasti pomocí systému tzv. diferenčních (algebraických) rovnic v základních bodech

- dělení oblasti na diskrétní geometrické elementy – vytvoření sítě
- bilancování neznámých veličin v konečných objemech nebo uzlech a diskretizace
- numerické řešení diskretizovaných rovnic v obecném tvaru

přitom diskretizační chyba se definuje jako rozdíl mezi řešením diferenciálních a diferenčních rovnic. Základní vlastnosti numerických metod jsou:

- míra přesnosti diskretizační chyby a residuálu
- míra stability

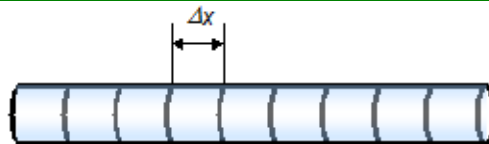
Existuje určitý vývoj v numerickém řešení rovnic definujících proudění tekutin a přenosu tepla.

2.2.1. Diferenční metoda řešení

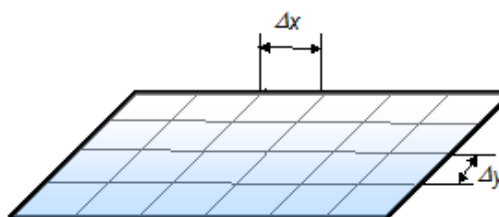
Nejstarší klasickou metodou je **diferenční metoda**. Princip diferenční metody pro řešení diferenciálních rovnic lze popsat následovně

- oblast, ve které se hledá řešení, se pokryje sítí složenou z konečného počtu nepřekrývajících se elementů. Nejjednodušší sítě jsou

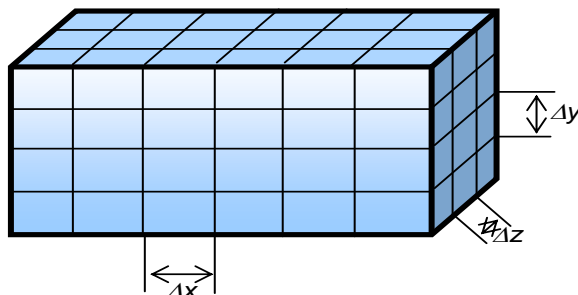
úsečky v jednorozměrném případě



obdélníky ve dvourozměrném případě



šestistěny ve trojrozměrném případě



- v těchto bodech se nahradí derivace diferencemi o různých přesnostech (např. $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i \approx \left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_i = \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}$), vztahy pro potřebné derivace se odvodí z Taylorova rozvoje se specifickým označením souvisejícím s vedením tepla, prouděním, atd.
- diferenciální rovnice přejde na soustavu algebraických rovnic o neznámých, které určují přibližné hodnoty neznámé funkce ve všech uzlech sítě,
- soustava algebraických rovnic se řeší numericky.

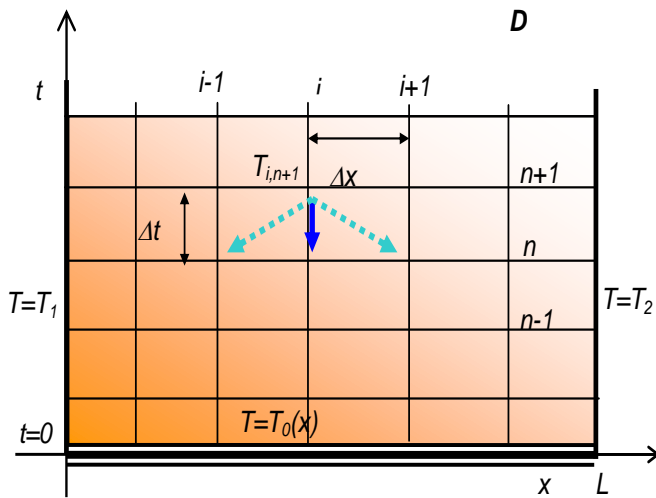
Řešený příklad

Řešte parabolickou diferenciální rovnici $\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ (rovnice vedení tepla v tyči). Řešení se

hledá v obdélníku $D(t, x)$, viz obr. 2.8. Tyč v čase $t=0$ má teplotu 20°C , na levém konci je ohřívána na konstantní teplotu 80°C a druhý konec má konstantní teplotu okolí 20°C . Tyč se v závislosti na čase zahřívá. Úloha musí splňovat následující podmínky:

počáteční podmínka $T(x,0) = T_0(x) = 20^\circ C \quad 0 < x < L.$

okrajové podmínky (BC) $T(0,t) = T_1(t) = 80^\circ C, T(L,t) = T_2(t) = 20^\circ C$



Po vysíťování oblasti index n odpovídá času a index i odpovídá x -ové souřadnici.

Diferenční rovnice vedení tepla má tvar

$$\frac{T_{i,n+1} - T_{i,n}}{\Delta t} = a \frac{T_{i+1,n} + T_{i-1,n} - 2T_{i,n}}{\Delta x^2}$$

a po úpravě platí

$$T_{i,n+1} = T_{i,n} + a\Delta t \frac{T_{i+1,n} + T_{i-1,n} - 2T_{i,n}}{\Delta x^2}$$

Tedy lze explicitně vyjádřit $T_{i,n+1}$

obr. 2.8 Geometrie oblasti, okrajové podmínky, síť

pomocí hodnot v předchozím časovém kroku n . V tomto případě lze najít řešení v Excelu. V následující Tab. 2.1 je v Excelu uvedeno zadání úlohy a řešení. Šedě vyznačené hodnoty lze měnit, tedy měnit velikost oblasti, počet elementů sítě, součinitel přestupu tepla a okrajové podmínky.

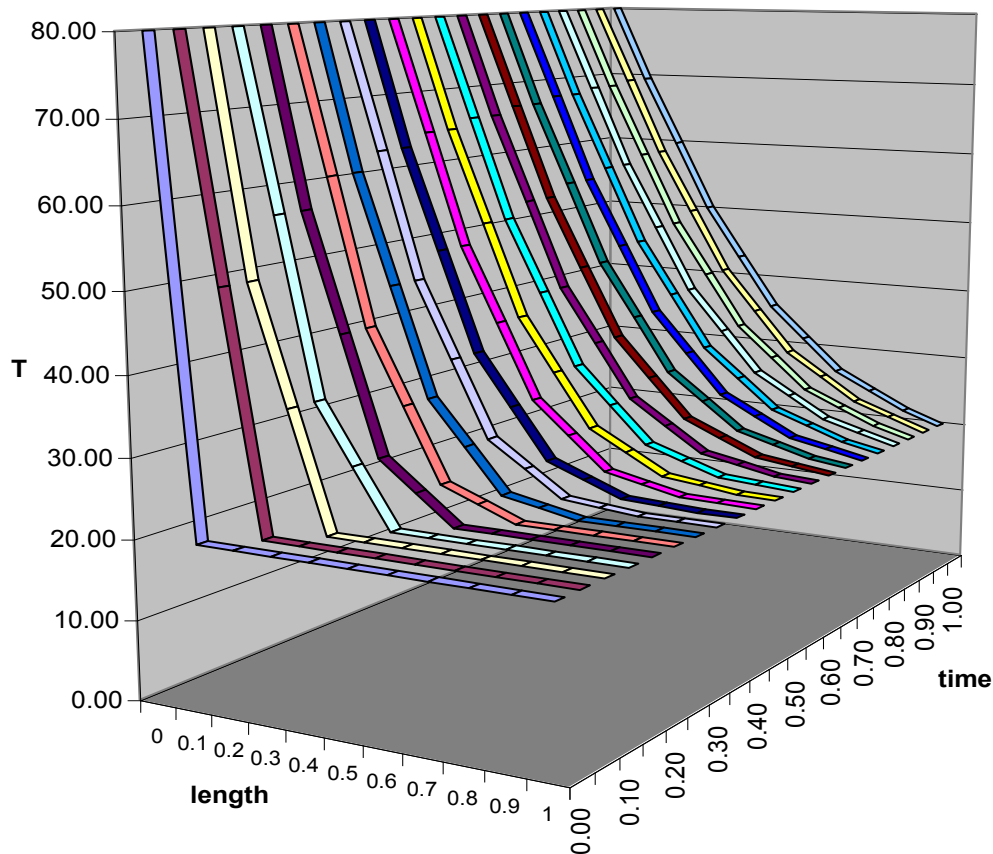
Tab. 2.1 Tabulka zadání parametrů pro iterační výpočet

a=	0.1	$T(x=0)= 80$	coef=	0.5
L=	1	$T(x=L)= 20$	$\Delta x=$	0.1
n=	10	$T(t=0)= 20$	$\Delta t=$	0.05

time	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
BC	0	80.00	80.00	80.00	80.00	80.00	80.00	80.00	80.00	80.00	80.00
	0.1	20.00	50.00	50.00	57.50	57.50	61.25	61.25	63.59	63.59	65.23
	0.2	20.00	20.00	35.00	35.00	42.50	42.50	47.19	47.19	50.47	52.93
	0.3	20.00	20.00	20.00	27.50	27.50	33.13	33.13	37.34	37.34	40.63
x	0.4	20.00	20.00	20.00	20.00	23.75	23.75	27.50	27.50	30.78	33.59
	0.5	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	21.88	21.88	24.22	24.22	26.56
	0.6	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.94	20.94	22.34	23.93
	0.7	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.47	20.47	21.29
	0.8	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.23	20.70
	0.9	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.12	20.12

BC 1 20.00 20.00 20.00 20.00 20.00 20.00 20.00 20.00 20.00 20.00 20.00 20.00

Konvergence úlohy závisí na volbě časového a prostorového kroku. Dalším problémem je efektivní řešení této soustavy algebraických rovnic. Na obr. 2.9 je vidět tměny rozložení teploty po délce tyče v závislosti na čase. Po zkonvergování úlohy by teplota byla rozložena lineárně od levé okrajové podmínky k pravé. Bohužel by byl graf nečitelný.



obr. 2.9 Grafické zobrazení řešení v Excelu

2.2.2. Metoda konečných objemů

Metoda konečných objemů [1] , [13] spočívá stručně řečeno ve třech základních bodech

- dělení oblasti na diskrétní objemy užitím obecné křivočaré sítě
- bilancování neznámých veličin v individuálních konečných objemech a diskretizace
- numerické řešení diskretizovaných rovnic

Fluent definuje diskrétní konečné objemy užitím **non-staggered schematu**, kdy všechny proměnné jsou uchovávány ve středech konečných objemů.

Fyzikální zákony popisující přenos jsou zákony zachování hmotnosti, hybnosti, tepla případně dalších skalárních veličin a popisují laminární i turbulentní režim proudění. Bilanční rovnice pro obecnou proměnnou má tvar (viz rov. (2.1.8))

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho\zeta)}{\partial t} dV + \iint_S (\rho\zeta \vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \iint_S [\alpha_\zeta \nabla \zeta] dS + \iiint_V S_\zeta dV$$

akumulace + konvekce = difúze + zdroj

Po diskretizaci této obecné rovnice přenosu v kontrolním objemu se získá:

$$\frac{\partial(\rho\zeta)}{\partial t} V + \sum_f^{N_f} \rho_f \zeta_f \vec{u}_f \cdot \vec{S}_f = \sum_f^{N_f} [\alpha_\zeta \nabla \zeta_f] \vec{S}_f + S_\zeta V \quad (2.2.1)$$

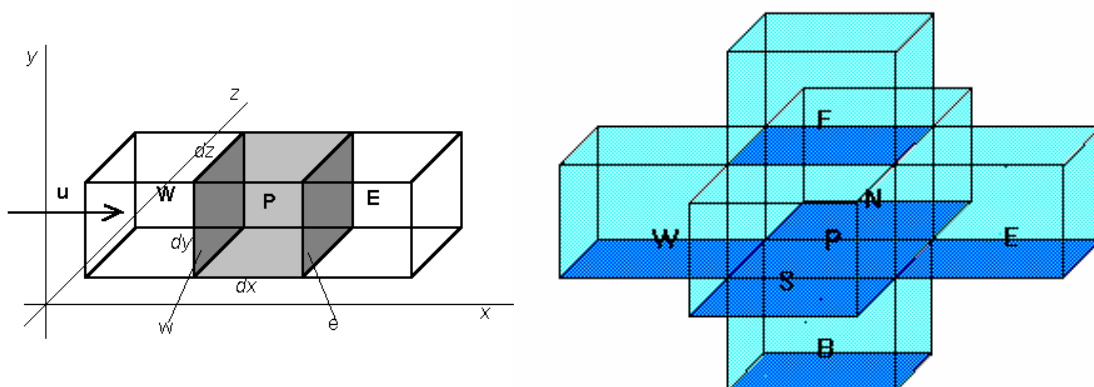
kde N_f je počet ploch obklopujících buňky, ζ_f je hodnota veličiny ζ procházející plochou f , $\rho_f \vec{u}_f \cdot \vec{S}_f$ je hmotnostní tok plochou f , \vec{S}_f je velikost plochy f , $\nabla \zeta_f$ je gradient proměnné ζ na ploše f , V je objem buňky.

Všechny rovnice řešené v ANSYS Fluentu mají stejný obecný tvar na libovolné síti.

Diskretizovaná rovnice bilance přenosu obsahuje obecnou proměnnou ζ ve středu buněk v jejím okolí. Tato rovnice je obecně nelineární. Její linearizovaná forma je

$$a_p \zeta = \sum_{nb} a_{nb} \zeta_{nb} + b \quad (2.2.2)$$

kde součet se provede přes sousední buňky (v jednorozměrném případě je $nb=E, W$; v trojrozměrném případě $i=N, S, E, W, F, B$), a_{nb} jsou koeficienty, které obsahují příspěvky od konvektivních, difúzních a zdrojových členů okolních buněk. Použité označení je patrné z obr. 2.10.of



obr. 2.10 Souřadnicové schéma se speciálním značením buněk pro 1D a 3D model místo indexů, kde N – sever (North), S – jih (South), E – východ (East), W – západ (West), F – vpřed (Front), B – vzad (Back)

Každá iterace sestává z kroků, které jsou zobrazeny diagramem na obr. 2.11. a jsou popsány následovně

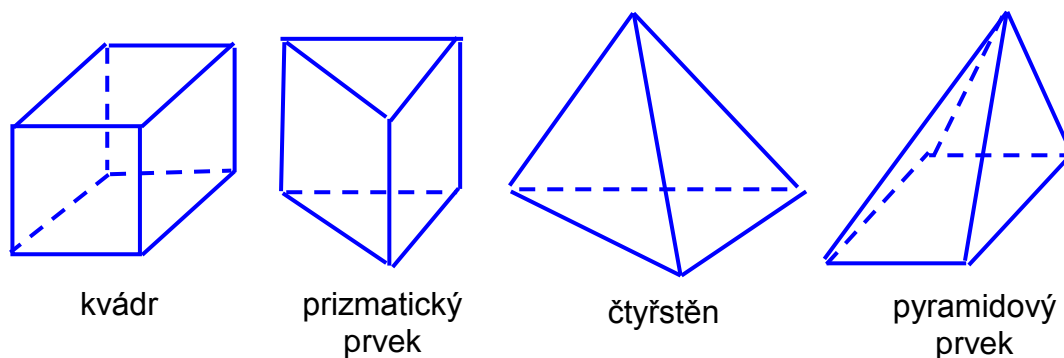
- pohybové rovnice pro neznámé složky rychlosti jsou řešeny s užitím hodnot tlaků tak, aby se aktualizovalo rychlostní pole
- rychlosti určené v předchozím bodě nemohou splňovat rovnici kontinuity, proto se určují tzv. tlakové korekce a následně korekce i rychlostního pole
- pomocí nových hodnot rychlostí se řeší rovnice pro turbulentní energii k a disipaci ε
- řeší se další rovnice pro určení teploty a dalších skalárních veličin
- aktualizují se fyzikální vlastnosti kapalin (např. viskozita)
- kontrola konvergence



obr. 2.11 Diagram algoritmu řešení Fluentem [1]

2.2.3. Vytvoření geometrie, prvky sítě

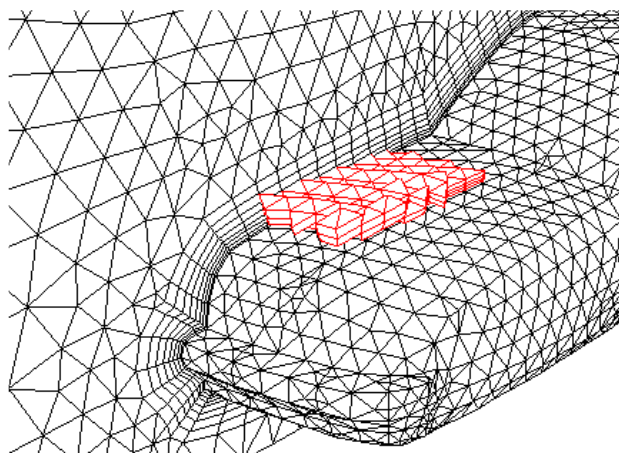
Numerická metoda konečných objemů je založena na vytvoření systému nepřekrývajících se elementů, konečných objemů. Původně byla metoda konečných objemů postavena na konečných objemech tvaru obdélníků a křivočarých čtyřúhelníků ve dvourozměrném případě a kvádrů nebo obecných šestistěnů v trojrozměrných úlohách (viz obr. 2.12).



obr. 2.12 Tvar konečného objemu

Takto vytvořená síť se nazývá **strukturovaná síť**. Zásadním pravidlem je, že hranice prvků musí sousedit s jedinou hranicí sousedního elementu, nelze tedy libovolně zhušťovat síť (je analogií pro metodu konečných diferencí včetně možnosti použití indexování). Také výsledná výpočtová oblast je pak kvádr nebo obdélník. V současné době se začíná prosazovat nový přístup, kdy se buduje tzv. **nestrukturovaná síť**. Konečným objemem je ve 3D kvádr, čtyřstěn, prizmatický a pyramidový prvek, jehož výhody byly ověřeny v úlohách pružnosti, řešených metodou konečných prvků.

Výše vyjmenované prvky se mohou kombinovat, čímž se získá optimální síť, kde v okolí stěny jsou použity čtyřúhelníky a kvádry (pro výpočet z hlediska přesnosti jsou optimální) a v dalších oblastech, kde nedochází z důvodu existence mezní vrstvy k velkým gradientům řešených veličin, se použijí zbývající prvky. Ty zajistí snadnou změnu hustoty sítě, viz obr. 2.13.



obr. 2.13 Použití různých typů prvků [1]

Pro vytvoření geometrie a sítě se používají různé CAD kresliče a následně software pro vytvoření sítě. Je třeba poznamenat, že je vhodné použít programy doporučené v manuálech

Ansyes-Fluent, protože sítě, kde se řeší pouze problém deformační nebo tepelné kondukce, jsou zcela odlišné od sítí generovaných pro problém proudění.

2.2.4. Výběr interpolačního schématu

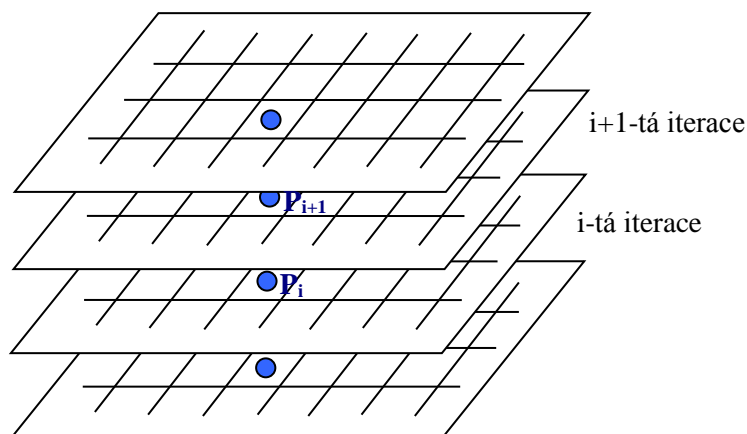
FLUENT ukládá složky rychlosti a skalární veličiny v geometrických středech konečných objemů definovaných sítí. Z důvodu výpočtového procesu jsou potřebné hodnoty těchto veličin na hranicích konečných objemů. Tyto hodnoty jsou získány interpolací, přitom si lze vybrat mezi následujícími třemi variantami lišícími se řádem přesnosti (vzestupně)

- mocninová interpolace
- kvadratická upwind interpolace
- interpolace druhého řádu/centrální diference
- QUICK
- interpolace třetího řádu (MUSCL)

Při velkých změnách tlaků a průtoků je vhodné rozpočítat úlohu s nejnižším řádem přesnosti (což je předdefinováno) a po několika iteracích využít vyšší řád přesnosti (pro proudění se zavíráním, s přenosem tepla, disipací apod.)

2.2.5. Konvergence a reziduály

Při simulaci proudění pomocí programu Fluent je velmi důležité získat konvergentní řešení. Mírou konvergence jsou reziduály, které představují maximum rozdílu dvou odpovídajících si veličin ve stejném bodě sítě ve dvou po sobě následujících iteracích. Reziduály jsou vyhodnocovány pro všechny počítané veličiny v každém kroku iterace a zobrazovány pro vybrané veličiny.



obr. 2.14 Iterace při numerickém stacionárním výpočtu

Kriterium konvergence je dané hodnotou reziduálů, které závisejí na dané proměnné.

Proto se prakticky používají normované reziduály (relativní chyba), které udávají přesnost závislou na platné cifře. Tedy pro všechny proměnné jsou limity reziduálů nastaveny na hodnotu 0.001 a pro teplotu na hodnotu 0.000001. Tyto hodnoty je možno zmenšit, především v případech komplikovaných geometrií a velkých teplotních gradientů.

2.2.6. Urychlení konvergence

Konvergence je ovlivněna mnoha faktory, jako je počáteční odhad, velký počet buněk, relaxační faktor atd.

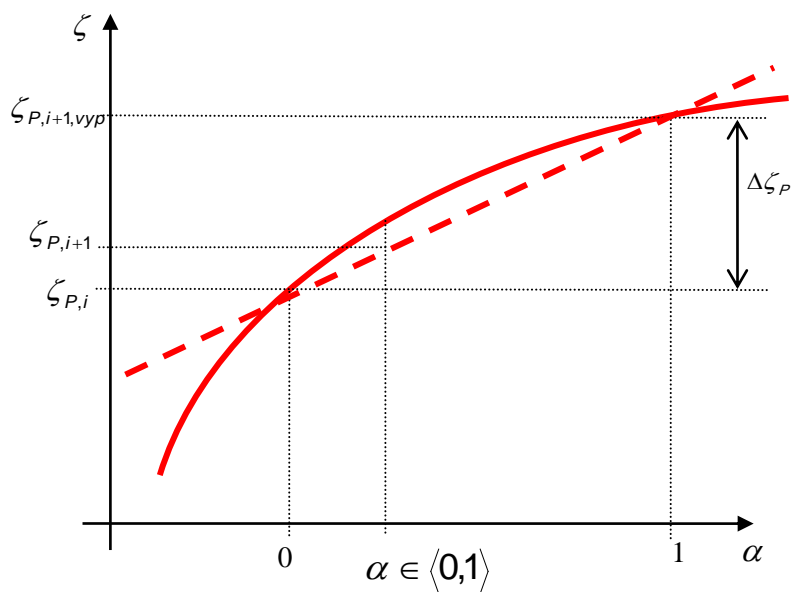
Pro urychlení konvergence se navrhuje využít **počátečního odhadu** proměnných významných pro proudění, což je nejlepší způsob, jak začít řešit úspěšně úlohu. V opačném případě jsou všechny veličiny definovány inicializací, často jsou pokládány rovny nule na počátku výpočtu. Nejvýznamnější příklady nastavení počátečních podmínek jsou:

- teplota pro problémy řešící přenos tepla při užití stavové rovnice
- rychlost při velkém počtu buněk
- teplota i rychlost při řešení přirozené konvekce
- proudění s reakcí, kdy je dobré nastavit teplotu i hmotnostní podíly.

Důležitou technikou k urychlení konvergence je **technika step by step** (postupně od jednoduché úlohy ke složitější). Při řešení problému s přenosem tepla je dobré začít výpočet z izotermního proudění, při řešení reagujícího proudění z proudění bez reakce se zahrnutím příměsí. Problém se nadefinuje nejprve celý a teprve potom se vyberou proměnné, pro které se vyřeší počáteční stav.

2.2.7. Relaxace

Z důvodu nelinearity diferenciálních rovnic není obecně možné získat hodnoty všech proměnných řešením původně odvozených aproximačních diferenčních schémat. Konvergence lze však dosáhnout užitím relaxace, která redukuje změny každé proměnné v každé iteraci. Jednoduše řečeno, nová hodnota $\zeta_{P,i+1}$ v konečném objemu obsahujícím bod P závisí na staré hodnotě z předešlé iterace $\zeta_{P,i}$, nové hodnotě z aktuální iterace $\zeta_{P,i+1,vyp}$ (resp. vypočtené změně $\Delta\zeta_P = \zeta_{P,i+1,vyp} - \zeta_{P,i}$ a relaxačním parametru $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$).



obr. 2.15 Specifikace relaxačního parametru

$$\zeta_{P,i+1} = (1 - \alpha)\zeta_{P,i} + \alpha \cdot \zeta_{P,i+1,vyp} \quad (2.2.3)$$

Tyto relaxační parametry se nastavují pro všechny počítané proměnné. Zvláště pro rychlosti se nastavují velmi malé, řádově desetiny až setiny. Přitom je vhodné během výpočtu tyto hodnoty měnit a tím urychlovat konvergenci, tzn. jestliže změny reziduálů jsou velké při přechodu od jedné iterace k druhé, nastaví se malý relaxační faktor a tím se tlumí vliv počáteční aproximace řešení a nelinearity, pokud se změny reziduálů stávají konstantní, je vhodné relaxační faktory zvětšit.

3. Přenos tepla kondukcí

3.1. Fourierova rovnice

Vedení tepla v pevných látkách je popsáno I. zákonem termodynamiky, tj. Fourierovou rovnicí, která má tvar:

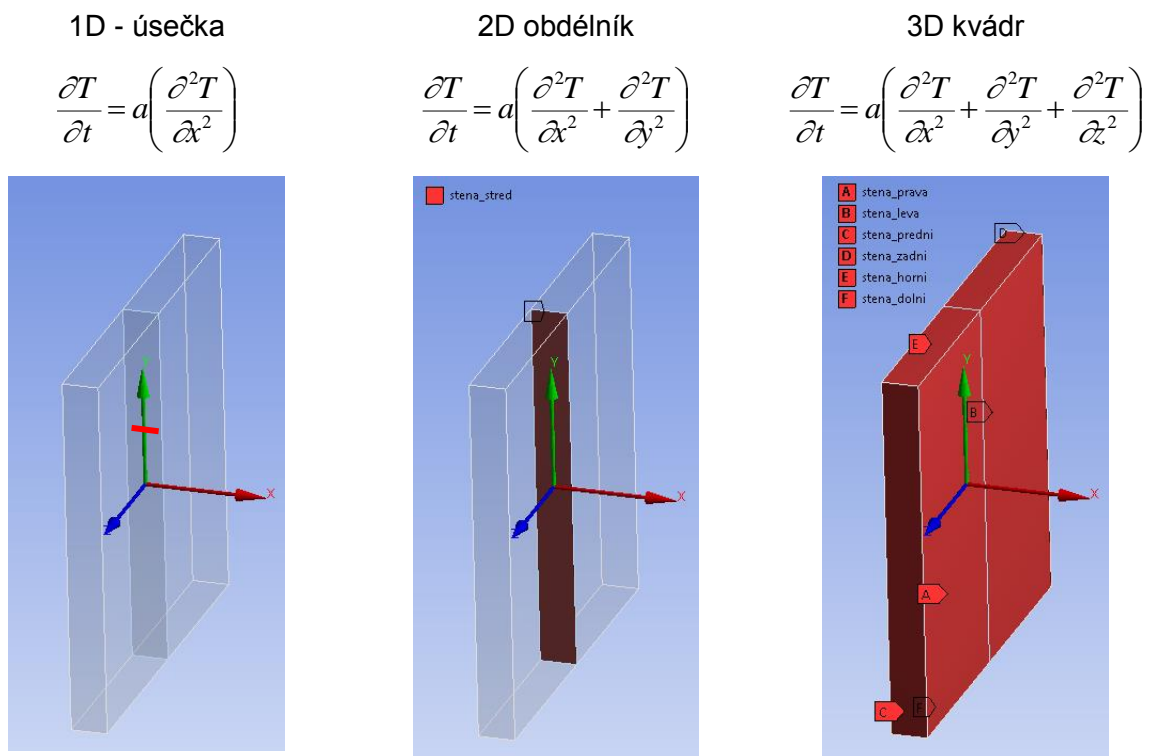
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (a \nabla T)$$

respektive ve složkách

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

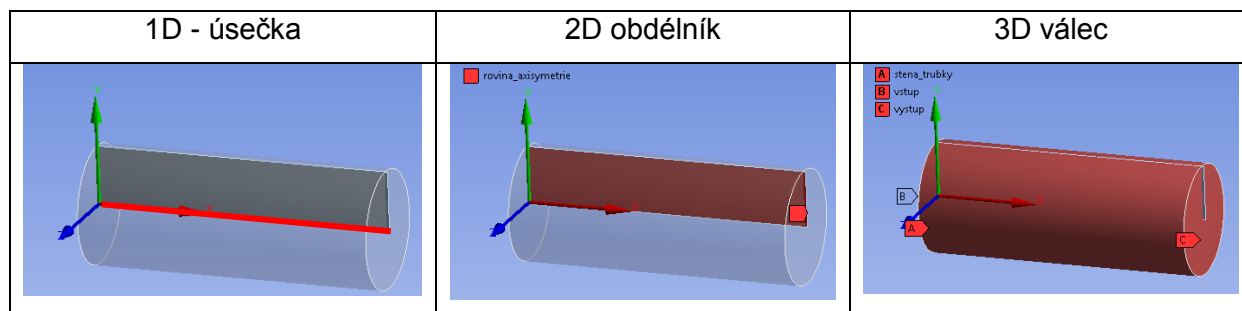
(3.1.1)

Pokud je oblast geometricky jednoduchá (například vedení tepla v desce) a pokud jsou jednoduché počáteční a okrajové podmínky, lze vzhledem k lineárnosti rovnici řešit analyticky (1D) a numericky (1D, 2D, 3D). Pokud je deska velkých rozměrů, lze zanedbat vliv konců desky, pak řešení může být zjednodušeno na 1D resp. 2D úlohu, viz obr. 3.1.



obr. 3.1 1D, 2D, 3D výpočtová oblast pro desku velkých rozměrů

V případě osově symetrické úlohy (vedení tepla v tyči) jsou zjednodušené na obr. 3.2. a rovnice jsou pak definovány ve válcovém souřadném systému.



obr. 3.2 1D, 2D, 3D výpočtová oblast pro válec

Z obrázků také vyplývá význam okrajových podmínek, které musí být ve shodě s experimentem.

3.2. Rovnice přenosu tepla kondukcí

Pro určení rozložení teploty je užitá Fourierova rovnice vyjadřující zákon zachování energie:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + S_h \quad (3.2.1)$$

- kde
- ρ hustota materiálu stěny
 - h entalpie vodivého materiálu, $c(T - T_{ref})$
 - c specifické teplo
 - λ tepelná vodivost
 - T teplota
 - S_h zdroj tepla

Ve výše uvedených rovnicích pro entalpie je výpočet definován pro referenční teplotu (např. $T_{ref} = 298.15 \text{ K}$), kterou lze měnit podle situace.

Pokud jsou řešeny úlohy, kde ještě dochází k pohybu či rotaci daného objektu, pak tyto efekty jsou zahrnuty v řešení rovnice energie:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \nabla \cdot (\vec{v} h) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + S_h \quad (3.2.2)$$

Konvekce tepla je z důvodu pohybu stěny rychlostí \vec{v} zahrnuta v rovnici energie pro oblasti ohraničující proudění.

Zadání tepelné vodivosti umožňuje řešit úlohy, kde pevná vodivá oblast je tvořena oddělenými stěnami z různých materiálů a různých vlastností. Hustota a specifické teplo stěny jsou důležité při řešení časově závislých úloh a při řešení ustáleného stavu pouze tehdy, když se stěna pohybuje. Typickými příklady jsou řešení dopravníkových pásů, pohybujících se ocelových válcovaných pásů v pecích, úlohy s rotačními strojními součástmi atd.

Všechny fyzikální vlastnosti mohou být podle charakteru úlohy konstantní nebo závislé na teplotě případně na tlaku. Nejvýznamnější veličinou v tomto smyslu je hustota.

Výše zapsaná rovnice je obecně předpokládána v trojrozměrném prostoru. Všechny varianty, jako je

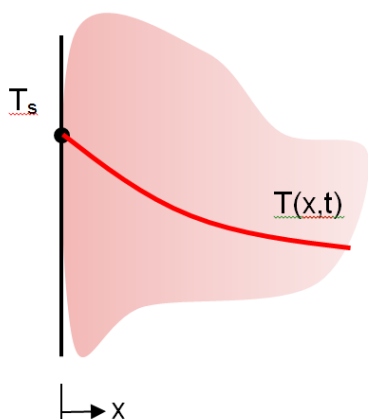
- přenos tepla převládající v jednom nebo dvou směrech
- přenos tepla v ose symetrickém (rotačním, válcovém) souřadném systému (potrubí)

jsou zvláštním zjednodušeným případem.

3.3. Okrajové podmínky

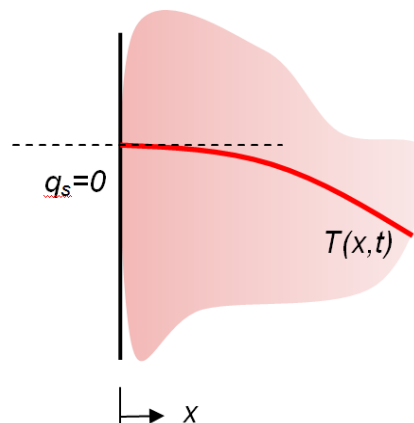
Tepelné podmínky lze definovat čtyřmi variantami, viz obr. 3.1.

- konstantní teplota
- konstantní hustota tepelného toku
- nulová hustota tepelného toku (izolace)
- konvekce – součinitel přestupu tepla a referenční teplota



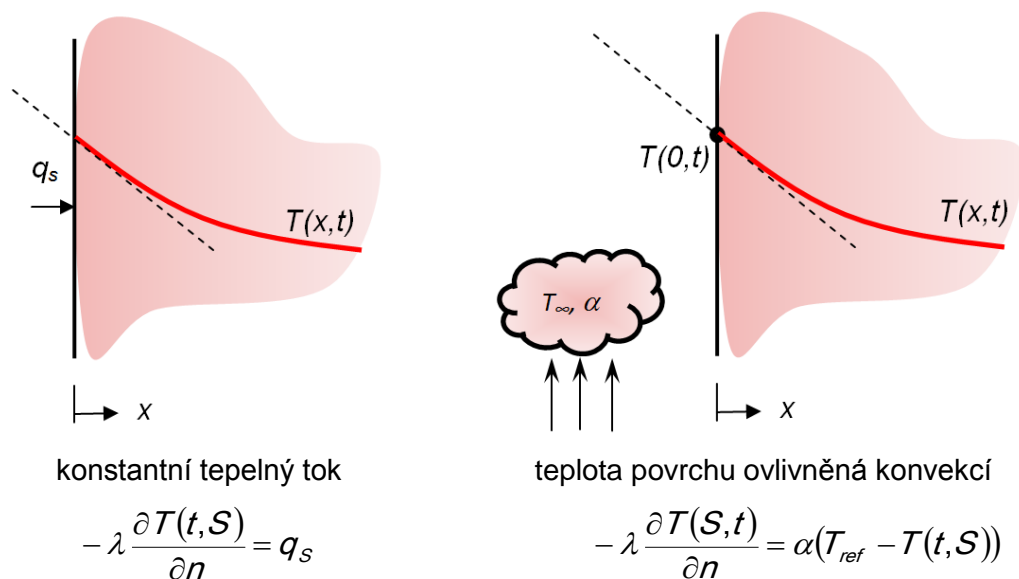
konstantní teplota povrchu

$$T(t, S) = T_s$$



adiabatická nebo izolovaná stěna

$$\frac{\partial T(t, S)}{\partial n} = 0$$



obr. 3.3 Typy okrajových podmínek

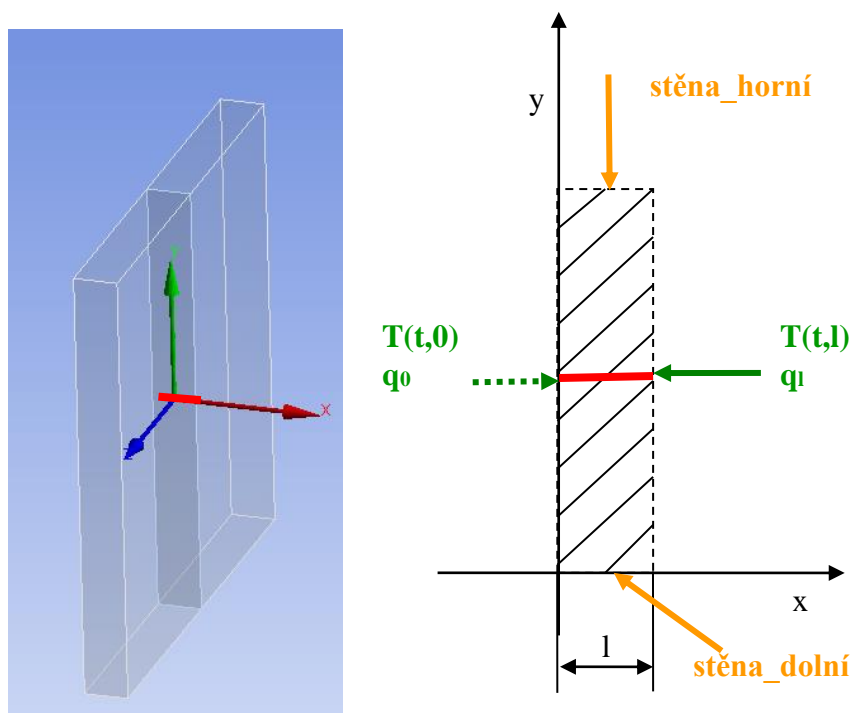
Poslední okrajová podmínka je složitá, neboť zahrnuje vliv proudění tekutin kolem stěn. Určení externího součinitele přestupu tepla α je dáno empiricky a mění se vlivem různých tekutin a rychlosti proudění. Teplota na vnější stěně je tedy výsledkem výpočtu.

Všechny typy podmínek mohou být časově závislé, pokud to vyžaduje jejich charakter.

3.4. Jednorozměrné vedení tepla stacionární

3.4.1. Analytické řešení

Při daném zjednodušení se uvažuje časově nezávislá (stacionární) úloha šíření tepla v nekonečně rozměrné desce o tloušťce l , viz obr. 3.4.



obr. 3.4 Schéma dostatečně velké desky o dané tloušťce v souřadném systému a řešená oblast – červená úsečka (1D)

Rovnice odpovídající tomuto problému je

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (3.4.1)$$

Tato homogenní rovnice má nenulové řešení pro nenulové okrajové a počáteční podmínky, jak je patrné z obr. 3.4. Tedy při konstantní tepelné vodivosti λ lze odvodit řešení

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = C_1 \Rightarrow q = -\frac{C_1}{\lambda} \quad (3.4.2)$$

$$T = C_1 x + C_2$$

Jestliže jsou dány okrajové podmínky na levé a pravé stěně, např. $T(0) = T_0$ a $T(l) = T_l$, pak

$$T_0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = T_0$$

$$T_l = C_1 l + C_2 = C_1 l + T_0 \Rightarrow C_1 = \frac{T_l - T_0}{l}$$

Řešení má pak tvar

$$T = \frac{T_l - T_0}{l} x + T_0 \quad (3.4.3)$$

Tento výsledek bude také potvrzen numerickým řešením ve Fluentu.

Pokud se předpokládá zdroj tepla uvnitř oblasti daný číselně tepelným tokem q' , pak diferenciální rovnice má tvar:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q' = 0 \quad (3.4.4)$$

Obecné řešení má tvar:

$$T = -\frac{q'}{2\lambda} x^2 + C_1 x + C_2 \quad (3.4.5)$$

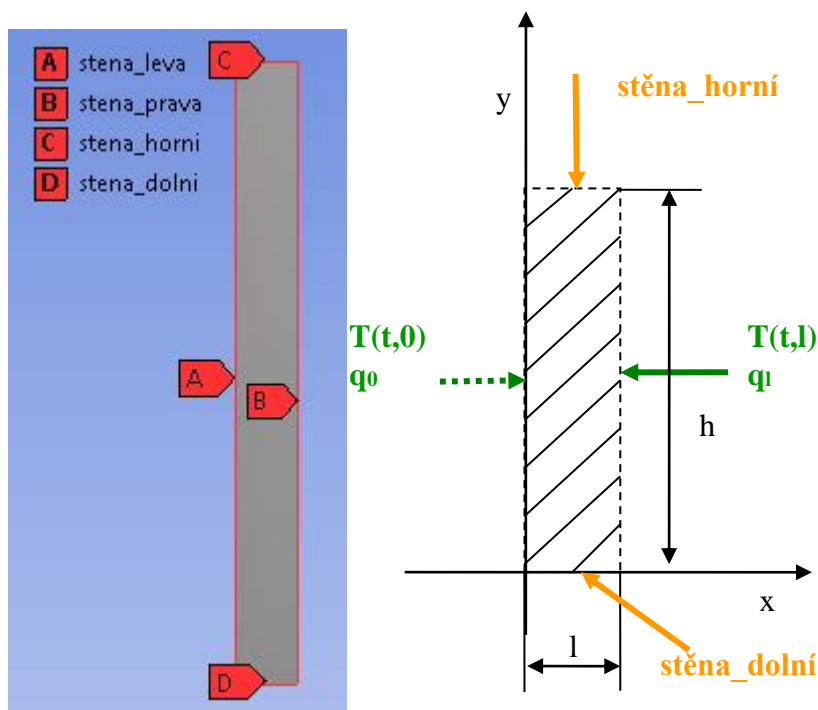
Konstanty se určí stejně z okrajových podmínek. Řešení je parabola, v případě shodných podmínek na obou hranicích oblasti je to symetrická parabola.

3.4.2. Numerické řešení

Tato kapitola ilustruje, jak zadávat a řešit rozložení teploty v desce o dané tloušťce ve Fluentu a následně bude toto řešení porovnáno s analytickým řešením. Úkolem je:

- definovat fyzikální model, fyzikální vlastnosti materiálu
- definovat matematický model, okrajové podmínky
- vytvořit geometrii a síť
- zadat okrajové a počáteční podmínky ve Fluentu, výpočet
- vyhodnotit vypočtené veličiny
- porovnat řešení s analytickým řešením
- aplikovat stejný postup pro různé varianty okrajových podmínek a zdroje tepla.

Řešte rozložení teploty v nekonečně velké desce ve 2D.



obr. 3.5 Schéma nekonečně velké desky (2D)

Řešte rozložení teplot v nekonečně velké desce z oceli o dané tloušťce. Fyzikální model je dán tvarem oblasti, jejíž schéma ve 2D je zobrazeno na obr. 3.5 a rozměry s fyzikálními vlastnostmi v tabulce (1D oblast nelze řešit, neodpovídá realitě).

Základní rozměry oblasti a fyzikální vlastnosti různých materiálů pro výpočet variant jsou zadány v Tab. 3.1 a

Tab. 3.2.

Tab. 3.1 Geometrie oblasti

tloušťka oblasti / [m]	0.01
výška oblasti h [m]	0.1

Tab. 3.2 **Fyzikální vlastnosti materiálu** (ocel, hliník, měď, dřevo) při 300 K

materiál	dřevo	ocel	hliník	měď
hustota ρ [kg·m ⁻³]	700	8030	2719	8978
měrná tepelná kapacita c_p [J·kg ⁻¹ ·K ⁻¹]	2310	502.48	871	381
tepelná vodivost λ [W·m ⁻¹ ·K ⁻¹]	0.173	16.27	202.4	387.6

Okrajové podmínky jsou definovány na levé stěně teplotou T_0 a na pravé stěně teplotou T_1 , tepelným tokem q_1 nebo teplotou okolí T_∞ a externím součinitelem přenosu tepla α . Pro úlohu je připraveno pět variant okrajových podmínek (A až E v Tab. 3.3), které budou testovány, protože jejich zadání a výpočet je při shodné geometrii velmi snadné. Vzhledem k velké rozměrnosti desky může být nahoře a dole definována teplota okolí, která velmi málo ovlivní teplotu uvnitř desky, nebo tepelný tok roven nule (izolovaná stěna) nebo podmínka symetrie.

Tab. 3.3 **Okrajové podmínky**

varianta	leva stena	prava stena	prava stena	prava stena
	$T(0) = T_1$	$T(l) = T_2$	$-\lambda \frac{\partial T(l)}{\partial x} = q_1$	$-\lambda \frac{\partial T(l)}{\partial x} = \alpha(T_\infty - T(l))$
				$\frac{\alpha(l)}{T_\infty}$
A	50	-10		
B	-20	100		
C	50		162700	
D	50		0	
E	50			40 -10

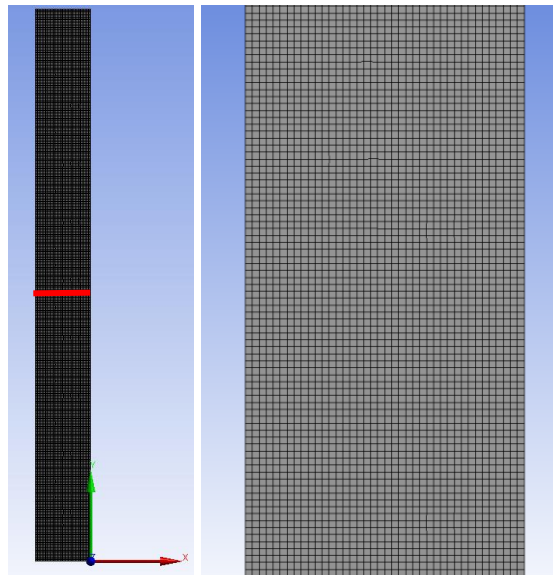
Matematický model

V této úloze nedochází k proudění, je tedy fiktivně řešeno proudění s nulovou

rychlostí, tedy jako laminární. Rozložení teploty je řízeno výše uvedenou diferenciální rovnicí.

Vytvoření geometrie a sítě

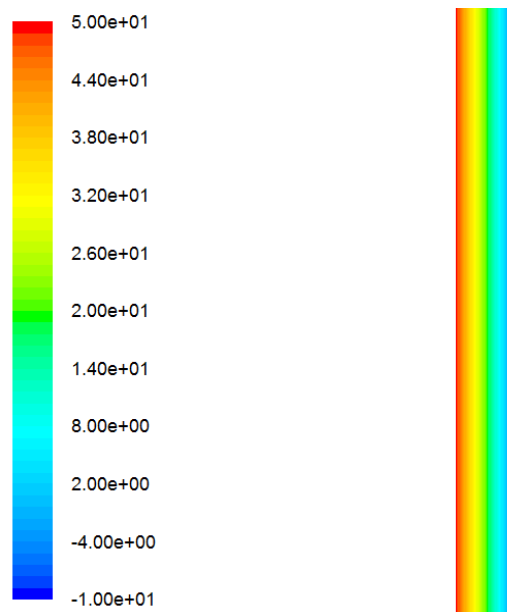
V prostředí DesignModeller se vytvoří přesná geometrie metodou podobnou prostředí CAD programů. Navíc se využije možností tohoto programu tvořit sítě, viz obr. 3.6.



obr. 3.6 Výpočetní síť s červeně vyznačenou linií pro podrobné vyhodnocení průběhu teploty a detail sítě

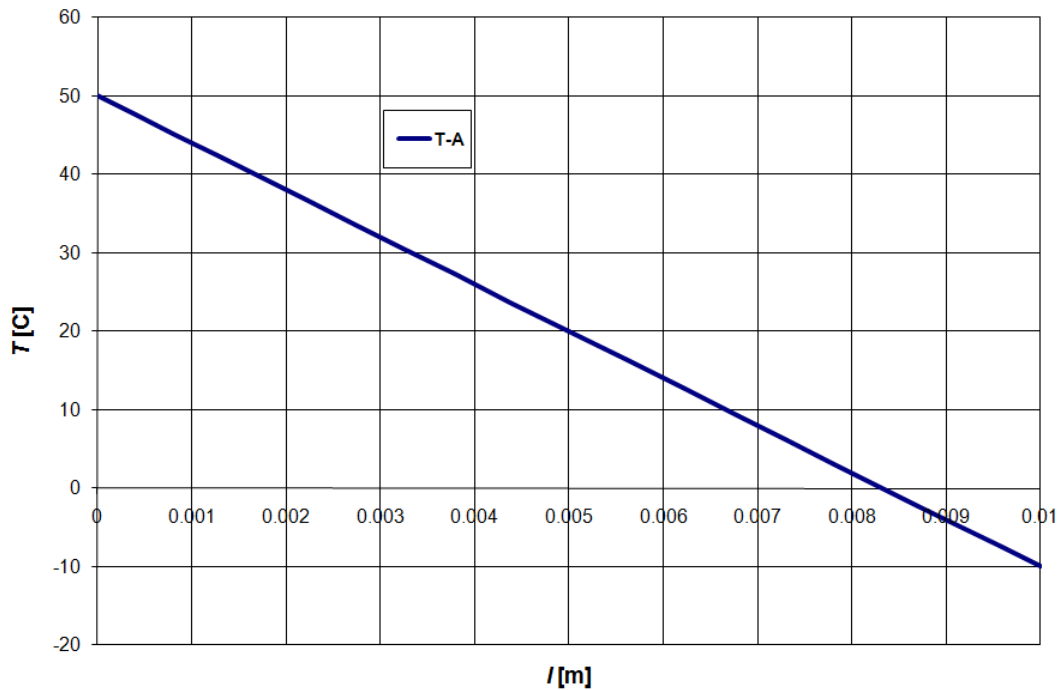
Výsledky výpočtu varianty A

Pro přehlednost se uvádějí možnosti vyhodnocení, tj. vyplněné izočáry teploty, ostatní veličiny nemají smysl, i když jsou nabízeny, jako je tlak, rychlost atd.



obr. 3.7 Rozložení teploty v celé oblasti [°C]

Rozložení teploty v příčném řezu uprostřed oblasti je na obr. 3.8, kde je vidět lineární pokles teploty od 50 °C do -10 °C. Toto je ve shodě s analytickým řešením (přímka spojující okrajové hodnoty teploty) v předešlé kapitole. Tento obrázek lze upravit v Excelu přenosem dat v textovém formátu.



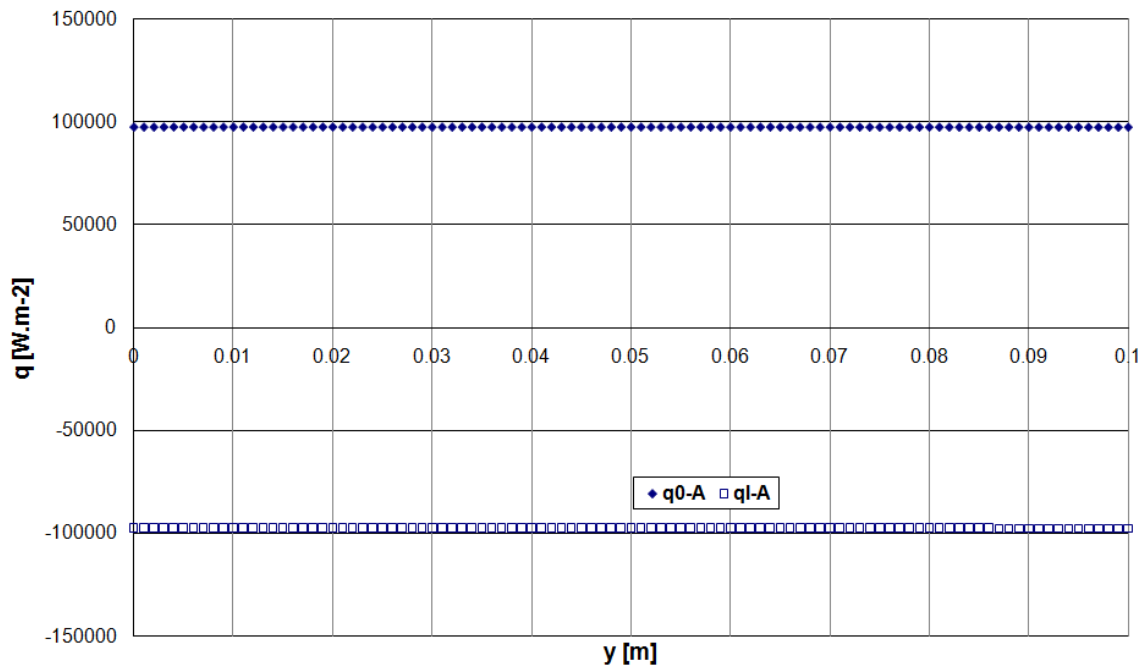
obr. 3.8 Rozložení teploty v příčném řezu oblasti

Velmi zajímavé je vyhodnocení tepla procházejícího celou levou resp. pravou stěnou:

Tab. 3.4

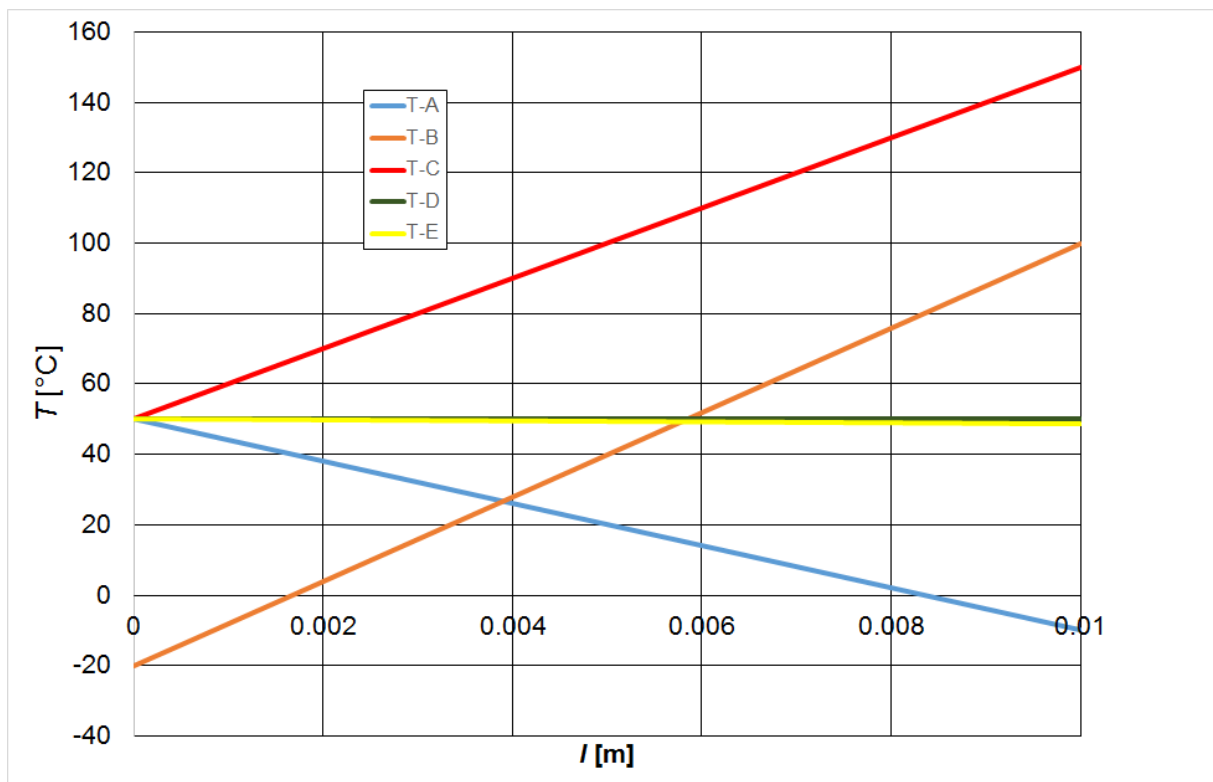
teplo procházející stěnou Q [W]	ocel
stena leva	9761.44
stena prava	-9762.65

Prostup tepla procházející elementy stěny v jednotkách $[W \cdot m^{-2}]$ lze také vyhodnotit podrobně v každém místě stěny. V tomto jednoduchém případě je konstantní, protože rozložení teplot je ve směru x lineární, tedy existuje jediná směrnice (derivace teploty je tok), ale v obecné geometrii tomu tak nebude.



obr.3.9 Rozložení toku tepla levou a pravou stěnou

Výsledky výpočtu ostatních variant okrajových podmínek pro ocel



obr. 3.10 Rozložení teploty v příčném řezu oblastí pro varianty A-E E T=48.6

Tab. 3.5

teplo procházející stěnou Q [W]	A	B	C	D	E
stena leva	9760	-19522	-1623	-4.365	22.5
stena prava	-9764	19526	16270	0	-23.4

Tok tepla procházející stěnou v jednotkách $[W \cdot m^{-2}]$ lze také vyhodnotit podrobně v každé buňce sítě. Protože je konstantní, vyhodnotí se pouze průměrná hodnota pro každou variantu:

Tab. 3.6

průměrná hodnota toku tepla procházející stěnou q $[W \cdot m^{-2}]$	A	B	C	D	E
stena leva	97518	-195216	-162536	-126	225
stena prava	-97720	195265	162700	0	-234

Hodnoty jsou přibližně desetkrát větší, neboť průtočná plocha je 0.1 m^2 .

3.5. Řešení distribuce tepla při nestacionárním přenosu

Matematický model řešený metodou MKO je stále stejný, jen v rovnicích bude uvažován člen obecně nazvaný akumulací a obsahující časovou derivaci. Tedy řešení bude definováno navíc s časovým krokem, který se odhaduje z reálného zadání a počtu časových kroků. Celkový čas tedy bude dán součinem časového kroku a počtu kroků.

Řešte problém potažení nekonečně velkého plechu z hliníku o dané tloušťce epoxidem, který musí být nanášen nejméně 5 min při teplotě $150 \text{ }^\circ\text{C}$. Děj tedy probíhá ve dvou fázích. V první fázi se hliník nahřeje ve velké peci vzduchem na teplotu $175 \text{ }^\circ\text{C}$. Ve druhém kroku se ochlazuje v prostoru vzduchem o teplotě $25 \text{ }^\circ\text{C}$.

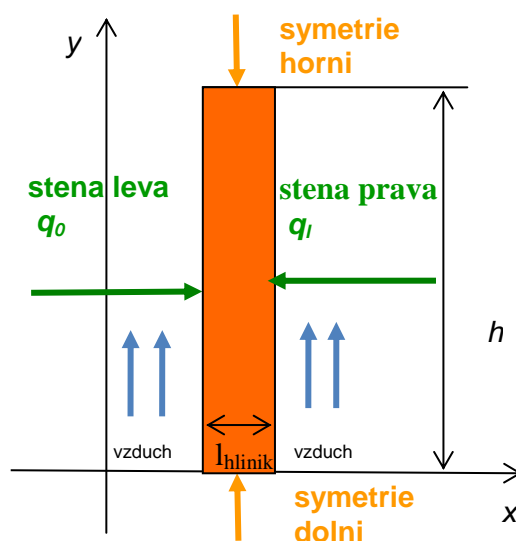
Fyzikální model je dán tvarem oblasti, jejíž schéma je ve 2D zobrazeno na obr. 3.11, pouze rozměry budou aktualizovány. Fyzikální vlastnosti a okrajové podmínky budou definovány dále tabulkami.

Tab. 3.7 Geometrie oblasti

tloušťka oblasti / [m]	0.003
výška oblasti h [m]	0.01

Tab. 3.8 Fyzikální vlastnosti materiálu (hliník) při 300 K

materiál	hliník
hustota ρ [kg·m ⁻³]	2719
měrná tepelná kapacita c_p [J·kg ⁻¹ ·K ⁻¹]	871
tepelná vodivost λ [W·m ⁻¹ ·K ⁻¹]	202



obr. 3.11 Schéma řešení úlohy

Okrajové podmínky

Okrajové podmínky jsou definovány na stěně vlevo i vpravo shodnou teplotou okolí a shodným tepelným tokem q_l , ovlivněným prouděním vzduchu, přitom se rozlišuje varianta při ochlazování nebo ohřívání. Vzhledem k velké rozměrnosti desky jsou nahoře a dole definovány podmínky symetrie. Podmínky teploty pro tuto okrajovou podmínku musí být definovány v K.

Tab. 3.9

Varianta	$\alpha(t)$ [W·m ⁻²]	T_∞ [°C]	T_∞ [K]
A ohřívání	40	175	448
B ochlazení	10	25	298

Matematický model

V této úloze nedochází k proudění, je tedy fiktivně řešeno proudění s nulovou rychlostí, tedy jako laminární. Rozložení teploty je řízeno výše uvedenou diferenciální rovnicí. Nejprve je řešena první fáze, kdy **ohřívání probíhá po dobu předem odhadnutou**, např.

$$10 \text{ min} = 600 \text{ s.}$$

Z grafu závislosti střední teploty hliníku na čase (obr. 3.12) je vidět, kdy je dosažena požadovaná teplota 150 °C. Po čase 5 min je možno změnit okrajové podmínky dané v druhé fázi ochlazování a pokračovat ve výpočtu. Z grafu je opět zřejmé, kdy je dosaženo potřebné teploty hliníkového plechu. Výpočet by se tedy mohl zkrátit o dobu odpovídající přeškrtnuté části křivky, tedy o dobu

$$T = 600 - 463 = 137 \text{ s}$$

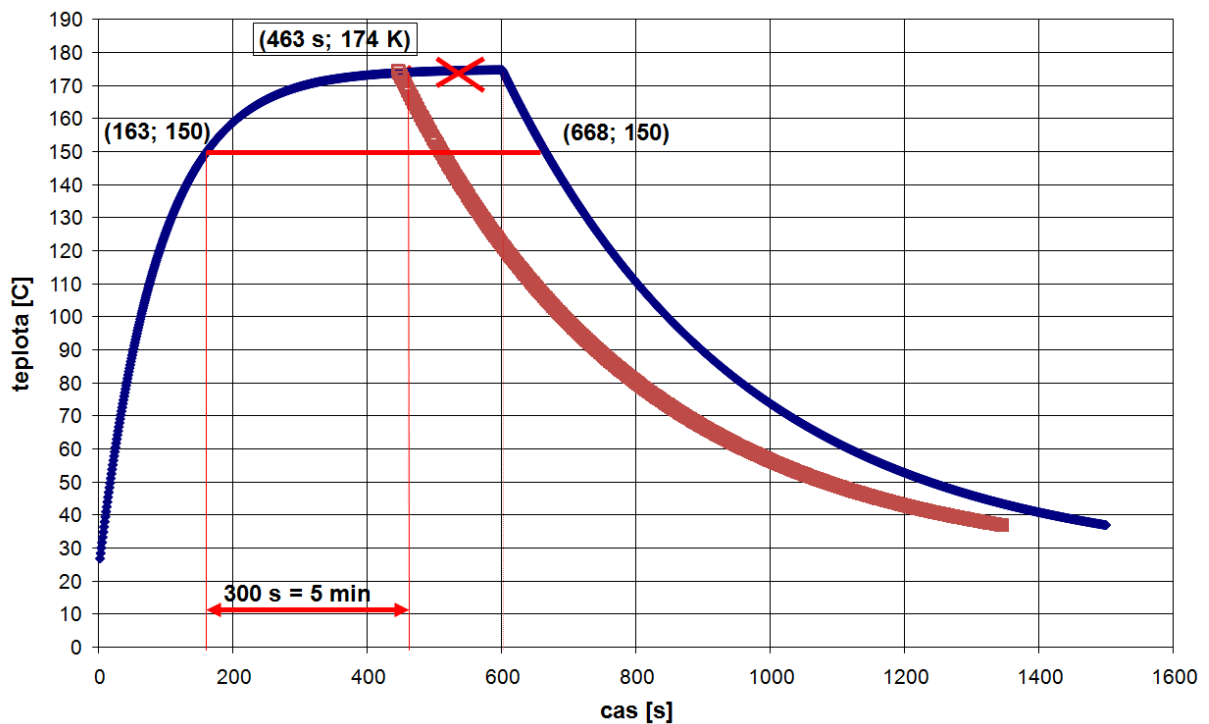
Tedy výpočet ohřívání by se nastavil ne na dobu 600 s ale na dobu 463 s a pak by se okrajové podmínky změnily na podmínky ochlazování.

Pozn.

Je samozřejmé, že Fluent umožňuje automatickou změnu okrajových podmínek při dosažení potřebného času a teploty pomocí UDF funkcí (User Defined Function). Rozložení teplot v celé oblasti je konstantní, proto nebude vykreslován průběh teploty v příčném řezu.

Výsledky

Výsledkem je graf závislosti teploty na čase s vyznačením změny okrajových podmínek v Excelu.



obr. 3.12 graf závislosti teploty na čase

4. Přenos hmoty a hybnosti

4.1. Rovnice kontinuity

Rovnice kontinuity je shodná pro ideální i skutečnou tekutinu, tedy podle zákona zachování hmotnosti (resp. hmotnostního průtoku) platí, že součet časové a konvektivní změny průtoku je roven nule případně zdrojovému členu S_z (např. spaliny z komína v řešené oblasti):

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = S_z \quad (4.1.1)$$

Také lze zapsat rovnici kontinuity v diferenciálním vektorovém tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = S_z \quad (4.1.2)$$

Nebo v diferenciálním tvaru:

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = S_z. \quad (4.1.3)$$

Tato rovnice je **obecná rovnice kontinuity pro neustálené prostorové proudění stlačitelné tekutiny**.

Při **ustáleném proudění nestlačitelné tekutiny** ($\rho = \text{konst}$) je rovnice kontinuity pak vyjádřena vztahem ve vektorovém tvaru (při nulovém zdroji):

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (4.1.4)$$

Pro proudovou trubici a proudění stlačitelné resp. nestlačitelné tekutiny platí známý zjednodušený vztah, kdy **hmotnostní resp. objemový průtok Q_V je konstantní**

$$Q_m = \rho u S = \text{konst.} \text{ resp. } Q_V = u S = \text{konst.} \quad (4.1.5)$$

4.2. Navierova-Stokesova (momentová, pohybová) rovnice

Rovnováha sil při proudění skutečné tekutiny je vyjádřena Navierovými-Stokesovými rovnicemi, vyjadřujícími vztah, kdy **setrvačná síla je rovna součtu hmotnostní a plošné (tlakové a třecí) síly**.

$$\vec{F}_s = \vec{F}_o + \vec{F}_p \quad (4.2.1)$$

V proudu skutečné tekutiny zvolíme elementární objem dV . Na tento objem tekutiny působí síla vnější objemová $d\vec{F}_o$ (např. gravitační nebo odstředivá síla, tj. síla definovaná vektorem zrychlení \vec{a}). Diferenciál pro hmotnostní sílu a následně celková síla je dána

$$d\vec{F}_o = \vec{a} dm = \rho \vec{a} dV \Rightarrow \vec{F}_o = \iiint_V \vec{a} \rho dV \quad (4.2.2)$$

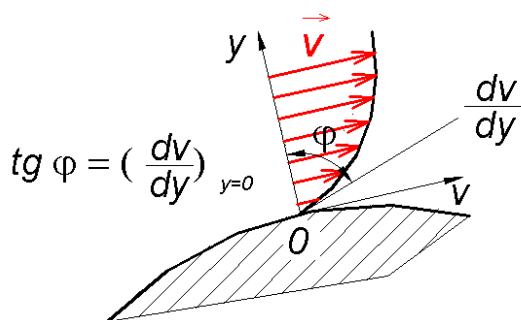
Podobně setrvačná síla je dána zrychlením (substanciální derivací) kapaliny $\frac{D\vec{u}}{Dt}$,

$$d\vec{F}_s = \frac{D\vec{u}}{Dt} dm = \frac{D\vec{u}}{Dt} \rho dV \Rightarrow \vec{F}_s = \iiint_V \frac{D\vec{u}}{Dt} \rho dV \quad (4.2.3)$$

Plošnou sílu, která zahrnuje jak sílu tlakovou, tak i sílu třecí, lze zapsat pomocí tenzoru molekulárních napětí $\bar{\Pi}$, tj. jak smykového a normálového napětí [4] [5] [10]:

$$\bar{\Pi} = -\rho \bar{\delta} + \bar{\tau}$$

kde ρ je normálová složka napětí (statický tlak), která určuje tlakovou sílu v hydromechanice ve směru vnitřní normály, takže je nutno tuto tlakovou sílu definovat se znaménkem mínus, $\bar{\tau}$ je tenzor smykových napětí, $\bar{\delta}$ je jednotkový tenzor se složkami $\delta_{i,j}$, které mohou nabývat hodnot 1, pokud $i=j$ nebo 0, pokud $i \neq j$. Pro ilustraci matematického vyjádření třecích sil se použije zjednodušený Newtonův vztah aplikovaný v souřadnicovém systému dle obr. 4.1.



obr. 4.1 Profil rychlosti v závislosti souřadnici y [11]

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy} \quad (4.2.4)$$

Tento nám již známý výraz vyjadřuje vztah mezi viskózním napětím a derivací rychlosti podle jedné souřadnice kolmé na směr pohybu.

Vektorovo-tenzorový zápis smykového napětí v prostoru je [8]:

$$\bar{\tau} = \eta \left[\left(\nabla \vec{v} + \left(\nabla \vec{v} \right)^T \right) - \frac{2}{3} \left(\text{div} \left(\vec{v} \right) \right) \bar{\delta} \right] \quad (4.2.5)$$

kde $\nabla \vec{v}$ je tenzor gradientů rychlosti se složkami $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)v_j$, $\left(\nabla \vec{v}\right)^T$ je transponovaný tenzor gradientů rychlosti se složkami $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)v_i$ a $\text{div}(\vec{v})$ je divergence vektoru rychlosti. Pro nestlačitelnou tekutinu je $\text{div}(\vec{v}) = 0$. Pak diferenciál plošných sil je

$$d\vec{F}_P = \bar{\Pi} \cdot \vec{n} dS = \left(-\rho \bar{\delta} + \vec{\tau}\right) \cdot \vec{n} dS = \left(-\rho \bar{\delta} + \eta \left[\nabla \vec{v} + \left(\nabla \vec{v}\right)^T\right]\right) \cdot \vec{n} dS \quad (4.2.6)$$

kde \vec{n} je vnější normála k elementu dS uzavřené plochy.

Rovnováha všech sil je vektorovém zápise pro obecnou stlačitelnou tekutinu v pravouhlém souřadném systému má tvar

$$\iiint_V \frac{D\rho \vec{u}}{Dt} dV = \iiint_V \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} dV + \iint_S \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = -\iint_S \rho \vec{n} dS + \iint_S \vec{\tau} dS + \iiint_V \vec{f} dV$$

resp. (4.2.7)

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\nabla p + \rho \vec{a} + \nabla \cdot (\vec{\tau}) + S_m$$

kde $\vec{u} \vec{u}$ je tzv. dyadický součin vektorů, viz kap. 13.1. Rovnice se nazývá **Navierova - Stokesova rovnice**. Tuto rovnici lze rozepsat do tří směrů souřadnic x , y , z pro případ nestlačitelného proudění:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= a_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} &= a_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= a_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Pro jednorozměrné proudění se tato rovnice redukuje podobně jako rovnice kontinuity na velmi jednoduchý tvar

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = a_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right) \quad (4.2.9)$$

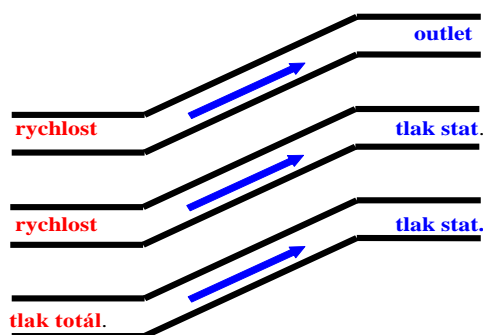
Ze které lze snadno odvodit známou Bernoulliho rovnici. Při řešení proudového pole se zpravidla určuje rozložení rychlostí a tlaků. Vedle pohybové rovnice se uplatní i rovnice spojitosti.

Všechny fyzikální vlastnosti mohou být podle charakteru úlohy konstantní nebo závislé na teplotě případně na tlaku. Nejvýznamnější veličinou je hustota.

V systému diferenciálních Navierových - Stokesových rovnic a rovnice spojitosti jsou čtyři neznámých veličin, tj. složky rychlosti u_x, u_y, u_z a tlak p . Pro řešení těchto rovnic musí být známé vnější zrychlení \vec{a} , hustota tekutiny ρ a okrajové podmínky. Navierovy - Stokesovy rovnice patří mezi nelineární parciální diferenciální rovnice a nejsou obecně řešitelné. Analytické řešení je dostupné pro jednodušší případy laminárního proudění. V současné době i složité případy laminárního a turbulentního proudění jsou řešitelné numerickými metodami, např. metodou konečných objemů a metodou konečných prvků.

4.3. Okrajové podmínky na průtočných hranicích a stěnách

Pro dvě průtočné hranice mohou nastat pouze následující základní kombinace okrajových podmínek, (kombinace vstupní rychlosti a výstupní rychlosti nemůže nastat, protože rychlost na druhém vstupu se počítá z rovnice spojitosti).



obr. 4.2 Kombinace vstupních a výstupních okrajových podmínek

Tab. 4.1 Okrajové podmínky na průtočných hranicích a stěnách

	Typ (Fluent)	Veličina	Jednotka
VSTUP	VELOCITY INLET	rychlost u	[ms ⁻¹]
	MASS FLOW RATE	hmotnostní průtok Q_m	[kgs ⁻¹]
	PRESSURE INLET	totální (celkový) tlak $p_{tot} = p_{stat} + p_{dyn} = p_{stat} + \frac{1}{2} \rho u^2$	[Pa]
VÝSTUP	OUTFLOW	podmínka ustáleného proudu $\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \frac{\partial p}{\partial n} = 0$	
	PRESSURE OUTLET	statický tlak p_{stat} (roven nule při proudění do atmosféry)	[Pa]
	MASS FLOW RATE	hmotnostní průtok Q_m	[kgs ⁻¹]
STĚNA	WALL	$u = 0$ předdefinováno (pohyblivá stěna – zadá se rychlost - např.	

		rotující nebo klouzající),	
	WALL	Smykové napětí – kapalina ulpívá na stěně (no slip)	

Pozn:

Pro stlačitelné proudění je

$$\rho_{tot} = \rho_{stat} \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} \text{Ma}^2 \right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (4.3.1)$$

kde ρ_{tot} celkový (totální) tlak

ρ_{stat} statický tlak

Ma Machovo číslo $\text{Ma} = \frac{\bar{u}}{c} = \frac{\bar{u}}{(\kappa r T_s)^{0.5}}$

r měrná plynová konstanta $r = \frac{R}{M}$, M je molekulová váha

κ poměr měrných tepel $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$

c rychlost zvuku v tekutině

Při zadání tlakové podmínky je nutné definovat směr proudění pomocí složek rychlosti případně pomocí proudění v normálovém směru k hranici.

Statický tlak na vstupu musí být specifikován v případě supersonického proudění.

V případě, že je proudění ovlivněno vztakovými silami, je tlakové pole a vstupní hodnoty tlaku celkového i statického při výpočtu automaticky zvětšeny o hydrostatický tlak:

$$\rho' = \rho_{ref} g x_i + \rho \quad (4.3.2)$$

Tedy zadává se do okrajové podmínky odchylka od hydrostatického tlaku, počítá se a také se vyhodnocuje. Je ale nutné zadat rozumnou hodnotu referenční hustoty ρ_{ref} při referenční teplotě.

Typickým příkladem laminárního proudění je Couetteovo proudění tekutiny mezi deskami a Poiseuilleovo proudění v trubce, kde je možno odvodit analyticky řešením Navierových – Stokesových rovnic a rovnice kontinuity rychlostní profily a tlakové spády ve směru proudění. Profily získané numerickým modelováním se pak přesně shodují s analytickými závislostmi.

5. Přenos tepla kondukcí a konvekcí při laminárním proudění

5.1. Rovnice energie

Rovnice energie se odvodí z Navierovy Stokesovy rovnice skalárním pronásobením vektorem rychlosti a koeficientem 0.5. Pak se doplní dalšími členy vyjadřujícími vnitřní energii

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{D(\rho E)}{Dt} dV &= \iiint_V \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} dV + \iint_S \rho E (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \\ &= \iint_S \lambda \nabla T dS - \iint_S \vec{\tau} dS + \iiint_V S_h dV \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot (\vec{u}(\rho E + p)) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \nabla \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{u}) + S_h$$

kde $E = U + \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u}$ je celková měrná energie, která je součtem vnitřní a kinetické (mechanické) energie, λ je součinitel molekulové tepelné vodivosti, druhý člen na pravé straně představuje teplo vznikající v důsledku tření, S_h zahrnuje chemické reakce a další zdroje tepla.

Zavede se pojem **entalpie**. Změna entalpie h je rovna teplotě, které soustava vykoná za konstantního tlaku, pokud se nekonala jiná práce než objemová definovaná vztahem

$$h = U + \frac{p}{\rho}$$

pak $E = h - \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u}$. Změna entalpie je definovaná pro ideální plyny jako

$$h = \int_{T_{ref}}^T c_p dT \quad [\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}] \quad (5.1.2)$$

a pro nestlačitelné médium (nestlačitelné plyny a kapaliny) jako

$$h = \int_{T_{ref}}^T c_p dT + \frac{p}{\rho} \quad [\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}] \quad (5.1.3)$$

Ve výše uvedených rovnicích pro entalpie je výpočet definován pro referenční teplotu (např. $T_{ref} = 298.15 \text{ K}$), kterou lze měnit podle situace.

Stavová funkce S se nazývá entropie a je definovaná

$$S = \int_{T_{ref}}^T \frac{dQ}{T} \quad S = \int_{T_{ref}}^T \frac{c_V}{T} dT \quad (5.1.4)$$

5.2. Matematický model laminárního proudění s kondukcí a konvekci

Ve velké většině případů je přenos tepla realizován současně kondukcí a konvekci. Matematický model sestává z následujících rovnic:

- **rovnice kontinuity** $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = S_z$
- **rovnice pohybové** - při laminárním proudění Navierovy - Stokesovy rovnice,

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\nabla p + \rho \vec{a} + \nabla \cdot (\tau) + S_m$$
- **rovnice energie** $\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \nabla \cdot (\vec{u} (\rho E + p)) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \nabla \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{u}) + S_h$

Řešení je doplněno **okrajovými podmínkami na průtočných hranicích a na stěně (viz předchozí kapitola)**. Při řešení kondukcí i konvekce bude modelováno více oblastí, některé z nich budou definované jako proudící médium (kondukcí i konvekce), některé oblasti budou jen pevné stěny (SOLID) dané tloušťkou, kde se bude řešit podrobné rozložení teplot (pouze kondukcí). Pak se mezi oblastmi tvoří speciální rozhraní a na něm speciální okrajové podmínky. Na následujících více či méně jednoduchých příkladech typických pro energetické aplikace bude demonstrováno využití výhod numerické metody konečných objemů.

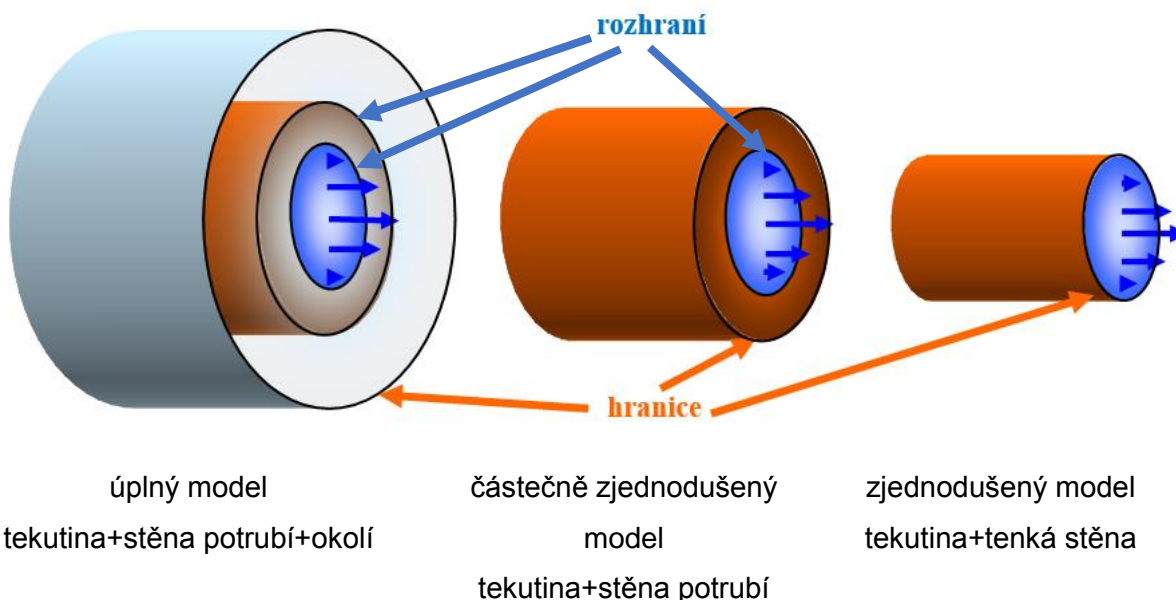
5.3. Okrajové podmínky při laminárním proudění s kondukcí a konvekci

Při izotermickém proudění je hranicí myšlena tenká stěna (plocha) obklopující tekutinu s okrajovými podmínkami danými prouděním. V případě neizotermního proudění závisí okrajové podmínky na každém konkrétním případě, tj. jestli je nutno použít úplný model, částečně zjednodušený model nebo zjednodušený model přenosu tepla:

- úplný model - řeší se rozložení teploty v proudícím médiu, stěně trubky (vodivá oblast) i v okolí (vzduch), okrajové podmínky jsou definované vnějšími tepelnými podmínkami okolí
- částečně zjednodušený model - řeší se rozložení teploty v proudícím médiu a stěně trubky (vodivá oblast), je nutné definovat teplotu nebo hustotu toku tepla na vnější stěně trubky,

- zjednodušený model – řeší rozložení teploty v proudicím médiu s hranicí definovanou stěnou nulové tloušťky (lze navíc respektovat tepelný odpor stěny zadané tloušťky) s přesně definovanými neizotermickými vlastnostmi a okrajovými podmínkami.

Jednotlivé přístupy jsou zobrazeny na obr. 5.1.



obr. 5.1 Proudění tekutiny potrubím ■ tekutina, ■ stěna potrubí, ■ okolí

V dalších kapitolách bude objasněno definování speciálních okrajových podmínek na hranici oblasti a na rozhraní mezi oblastmi různých materiálů.

Hranice je pak nejvzdálenější plocha nulové tloušťky s definovanými okrajovými podmínkami. Na hranici se nastaví podmínky proudění, viz kap. 4.3 a podmínky charakterizující přenos tepla, tj.

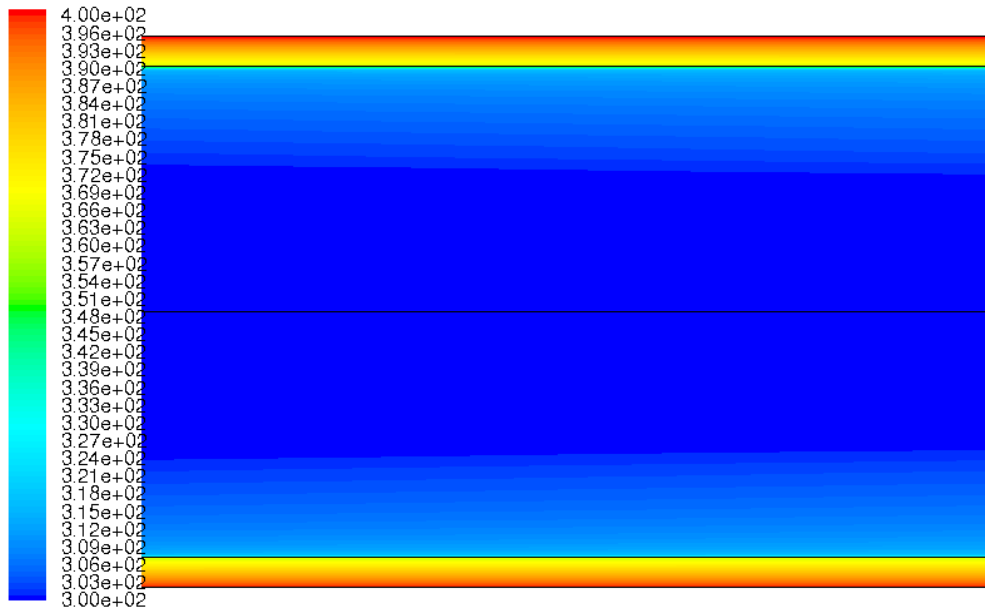
Heat condition	Typ (Fluent)	Veličina	Jednotky
VSTUP	VELOCITY INLET	rychlost u teplota T	[ms ⁻¹] [K]
	MASS FLOW RATE	hmotnostní průtok Q_m teplota T	[kgs ⁻¹] [K]
	PRESSURE INLET	totální (celkový) tlak $p_{tot} = p_{stat} + p_{dyn} = p_{stat} + \frac{1}{2} \rho u^2$ teplota T	[Pa] [K]
VÝSTUP	OUTFLOW	podmínka ustáleného proudu $\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \frac{\partial T}{\partial n} = 0$	
	PRESSURE OUTLET	statický tlak p_{stat} (roven nule při proudění do atmosféry)	[Pa]

		teplota T	[K]
	MASS FLOW RATE	hmotnostní průtok Q_m teplota T	[kgs ⁻¹] [K]
STĚNA	WALL	$u = 0$ předdefinováno (pohyblivá stěna), teplota T konstantní hustota toku tepla q nulová hustota toku tepla (izolace) $q=0$, konvektivní přenos tepla α , T_{ref} radiace	
	WALL	Smykové napětí – kapalina ulpívá na stěně (no slip), lze zadat smykové napětí teplota T konstantní hustota toku tepla q nulová hustota toku tepla (izolace) $q=0$ konvektivní přenos tepla α , T_{ref} radiace	

Pokud se řeší přenos tepla, na hranici se nastavují tepelné podmínky, viz kap 3.3 (poslední charakterizují radiaci).

Hranice je tzv. jednostranná stěnová zóna a rozhraní je dvoustranná stěnová zóna, která je nejčastěji vodivá - COUPLED). Je-li stěnová zóna dvoustranná (two-sided wall), stěna tvoří rozhraní mezi dvěma oblastmi, jako je rozhraní tekutina/stěna nebo stěna/stěna pro problém přenosu tepla, pak je možné modelovat tepelnou vodivost uvnitř hraničních stěn a vnitřních stěn (dvoustranných), Dále existuje také možnost si vybrat, zda jsou nebo nejsou podmínky na dvoustranné stěně propojeny (coupled – teplo prochází stěnou).

Na obr. 5.2 je možno sledovat rozložení teploty v oblasti proudícího média a ve stěně, kdy na vnější ploše stěny je dána konstantní podmínka pro teplotu. Šíření tepla je ovlivněno materiálem, tj. vodivostí stěny a vody, a samozřejmě prouděním.

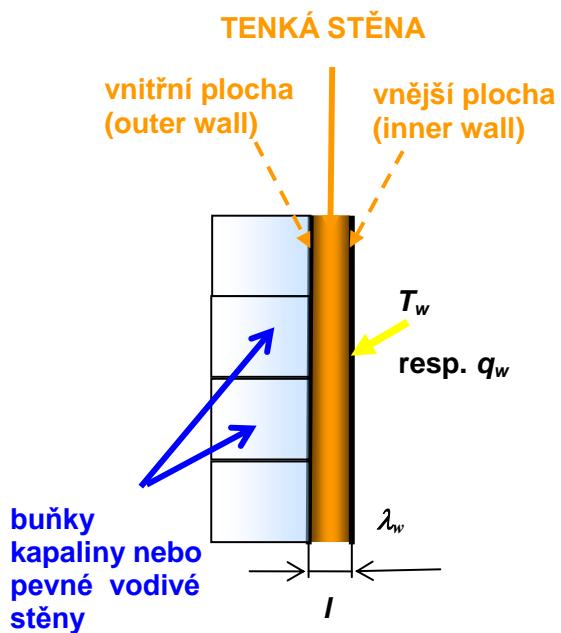


obr. 5.2 Detail konce oblasti s rozložením teploty pro částečně zjednodušený přístup řešení.

5.3.1. Okrajové podmínky na hranici oblasti - tenká stěna

Podle předpokladu má stěna nulovou tloušťku. Je-li stěna nenulové tloušťky, lze nastavit parametry pro výpočet tepelného odporu pro tenkou stěnu a modelovat tak tenkou vrstvu materiálu mezi dvěma zónami. Např. lze modelovat účinek kousku plátu mezi dvěma zónami tekutiny, potahování pevné látky, nebo kontaktního odporu mezi dvěma pevnými oblastmi. Fluent pak řeší 1D rovnici vedení tepla, aby spočítal tepelný odpor definovaný stěnou a generaci tepla ve stěně. Aby se mohly tyto účinky zahrnout do výpočtu přenosu

obr. 5.3 Okrajová podmínka na tenké stěně [1]

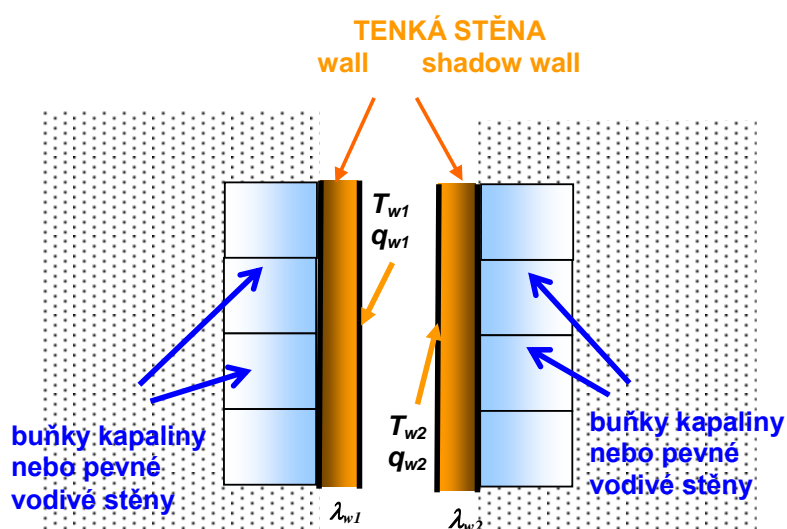


tepla, je třeba specifikovat typ materiálu, tloušťku stěny a generaci tepla ve stěně. Tedy vybere se materiál, specifikuje se tloušťka stěny. Tepelný odpor stěny je $\frac{l}{\lambda}$, kde λ je tepelná vodivost materiálu stěny a l je tloušťka stěny. Teplotní podmínka resp. podmínka hustoty tepelného toku bude specifikována na vnější straně stěny, jak je patrné na obr. 5.3.

Dle konvence užitá ve Fluentu bude nazvána vnitřní plocha (inner wall). T_w je konstantní teplota stěny. Je třeba poznamenat, že pro tenkou stěnu je možné definovat pouze konstantní tepelnou vodivost. Je-li třeba užít nekonzstantní tepelnou vodivost pro nenulovou tloušťku, je nutno stěnu definovat konkrétní geometrií a vysítovat.

5.3.2. Okrajové podmínky na tenké dvoustranné stěně

Jestliže stěna má na každé straně kapalinu nebo pevnou stěnu, nazývá se tato **stěna dvoustranná** (two-sided wall), a je schematicky zobrazená na obr. 5.4.



obr. 5.4 Okrajová podmínka na stěně se dvěma povrchy [1]

Když je vložena síť s tímto typem stěny do Fluentu, vytvoří se automaticky „shadow“ zóna tak, že každá strana stěny je stěnová zóna. V panelu WALL se ukáže jako „Shadow Face Zone“. Pak lze definovat odlišné tepelné podmínky na každé zóně označené WALL a SHADOW WALL, nebo propojit (coupled) obě zóny:

- Při propojení zón je třeba vybrat Coupled option v Thermal Conditions (tento parametr se objeví ve WALL panelu, když stěna je dvoustranná). Žádné doplňující tepelné okrajové podmínky nejsou požadovány, protože přestup tepla bude řešen přímo z rovnic pro sousedící buňky. Lze ale definovat typ materiálu, tloušťku stěny a generaci tepla pro výpočty tepelného odporu, jak bylo uvedeno výše. Parametry odporu tepla budou automaticky nastavené na „shadow“ stěnové zóně.
- Při odlišných (nepropojených) stěnových zónách mohou být definovány odlišné tepelné podmínky na každé z nich. Je třeba vybrat Temperature nebo Heat Flux (Convection a Radiation nejsou možné pro dvoustrannou stěnu). Obě nepropojené

stěny mohou mít odlišnou drsnost a jsou navzájem izolovány. Pokud je třeba specifikovat nenulové tloušťky stěn pro nepropojené zóny, tepelné podmínky budou definovány na vnější ploše nenulových stěn, jak je patrné z obr. 5.4, kde T_{w1} a T_{w2} je teplota (q_{w1} a q_{w2} je tepelný tok) definovaná na jedné a druhé stěně. λ_{w1} a λ_{w2} jsou tepelné vodivosti na nepropojených nenulových stěnách. Mezera mezi stěnami není částí modelu, je pouze z ilustrativních důvodů zahrnuta do obrázku.

5.4. Součinitel přestupu tepla

Součinitel přestupu tepla stěnou je veličina definovaná rovnicí

$$\alpha = \frac{q}{T_{wall} - T_{ref}} \quad [\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}] \quad (5.4.1)$$

kde q je konvektivní tok tepla, T_{wall} je teplota stěny a T_{ref} je referenční teplota, která by měla být reprezentativní pro daný problém. Referenční teplota může být definována jako:

- konstantní hodnota (Surface Heat Transfer Coefficient) vhodně definována na základě zkušeností řešitele a je běžně používaná v inženýrských aplikacích
- teplota v blízkosti stěny (Wall Heat Transfer Coefficient), která je výsledkem numerického výpočtu. Je závislá na mezní vrstvě a při modelování také na velikosti buněk. Navíc při nepravidelné síti se velikost buněk může výrazně měnit.

Proto bude součinitel přestupu tepla vyhodnocován jako **Surface Heat Transfer Coefficient**. Druhá varianta je vhodná pro podrobné zkoumání přestupu tepla s velmi jemnou sítí.

5.5. Přestup tepla při obtékání desky

V návaznosti na zkušenosti s modelováním přestupu tepla různými materiály prezentovanými kap. 3 bude využita stejná geometrie ale pro více vrstev materiálu s tím, že prostřední vrstva bude opět materiál SOLID (ocel), ale z levé i pravé strany bude proudit vzduch v laminárním režimu.

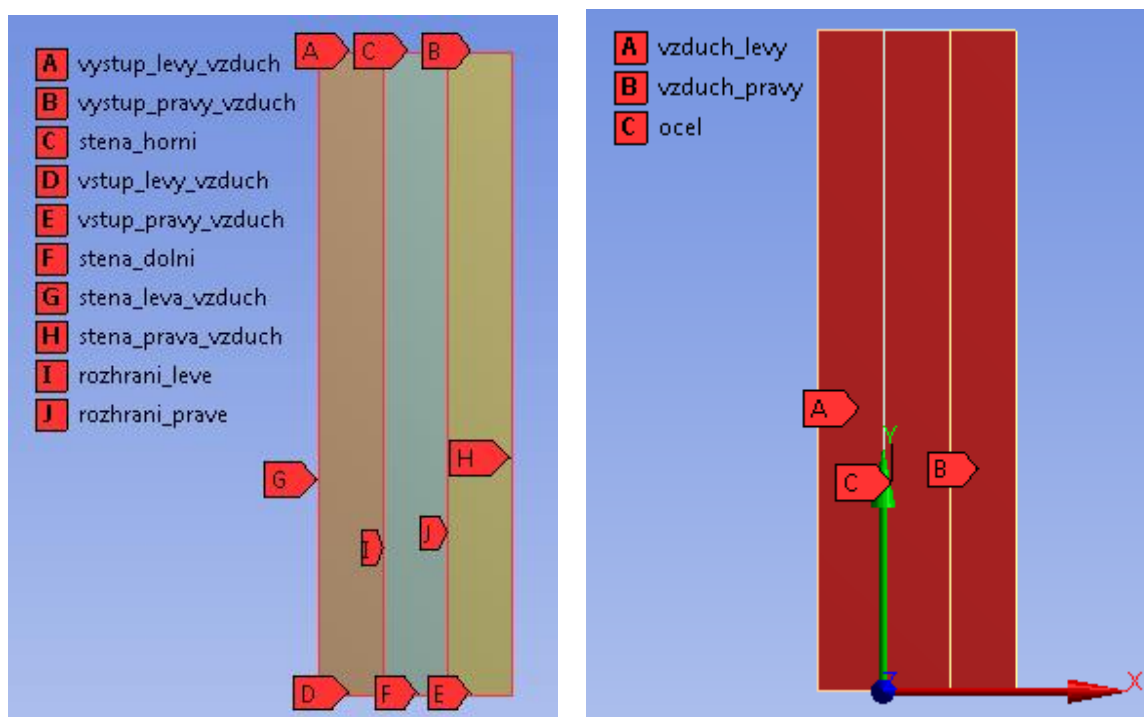
Řešte rozložení teploty v důsledku kondukcce a konvekce ve vrstvě oceli, která bude z obou stran obklopená vzduchem. Fyzikální model je dán tvarem oblasti, jejíž schéma ve 2D je zobrazeno na obr. 5.5 a rozměry s fyzikálními vlastnostmi v Tab. 5.1 a Tab. 5.2.

Tab. 5.1 **Geometrie oblasti**

tloušťka oblasti $l_{ocel} = l_{vzduch}$ [m]	0.01
výška oblasti h [m]	0.1

Tab. 5.2 Fyzikální vlastnosti materiálu (ocel, vzduch) při 300 K

materiál	ocel	vzduch
hustota ρ [$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$]	8030	1.225
měrná tepelná kapacita c_p [$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$]	502.48	1006.43
tepelná vodivost λ [$\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$]	16.27	1006.43
viskozita η [$\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$]		$1.7894\cdot 10^{-5}$



obr. 5.5 Schéma rozměrné obtékané desky v souřadném systému a okrajové podmínky

Okrajové podmínky

Okrajové podmínky jsou definovány na stěně vlevo a vpravo teplotou, tj. varianta A z minulého příkladu. Na vstupu pro vzduch je definována rychlost a na výstupu tlak. Vzhledem k velké rozměrnosti desky jsou nahoře a dole definovány stěny s teplotou okolí (293 K), ale může to být i podmínka symetrie.

Mezi proudícím plynem a deskou je rozhraní, kde se řeší přestup tepla. Ve Fluentu je toto rozhraní definováno dvěma plochami, mezi nimiž je nulová tloušťka. Toho se využije při obtékání např. tenkých desek (ve srovnání s řešenou oblastí), plechů, radiátorů apod. Tyto objekty nemusejí být zachyceny sítí, čímž se ušetří buňky při síťování. Tato zdvojená plocha se objeví vždy při přenosu dat Meshingu nebo jiného programu na tvorbu geometrie do Fluentu. Název stěny zůstane a navíc se vytvoří její stín.

rozhraní vs. rozhraní shadow

Na těchto stěnách nemusejí být zadány okrajové podmínky, teplo jimi prostupuje, nazývají se "coupled". Tento případ vyhovuje zadání úlohy. Jiná varianta je podrobné zadání okrajových podmínek na obě strany.

U všech typů stěn se zadává tloušťka stěny. Pokud je stěna hranicí, její tloušťka je nula, pokud je to reálná stěna, lze zadat tloušťku (3 mm).

Tab. 5.3 Okrajové podmínky

název	typ (Fluent)	teplota [K]	rychlost [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$]	tlak [Pa]
stena leva	wall	323		
stena prava	wall	263		
vstup levý vzduch	velocity inlet	323	0.1	
vstup pravý vzduch	velocity inlet	263	0.1	
výstup levý vzduch	pressure outlet	323		0
výstup pravý vzduch	pressure outlet	263		0
stena horní	symmetry			
stena dolní	symmetry			
rozhraní levo	coupled			
rozhraní levo shadow	coupled			
rozhraní pravo	coupled			
rozhraní pravo shadow	coupled			

Odhad bezrozměrných parametrů proudění

Pro výpočet byly použity vzorce pro obtékání desky, viz kap. 1.4. Výpočty jsou provedeny pro obtékání desky zleva, při obtékání desky zprava se odhady nepatrně liší, protože z důvodu změny teploty se použijí jiné fyzikální vlastnosti vzduchu.

Výpočty

Reynoldsovo číslo	Re=	629
Prandtlovo číslo	Pr=	0.773856
Nusseltovo číslo	Nu=	15.29314
součinitel přestupu tepla	α =	40.22 $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$

Matematický model

V této úloze dochází k laminárnímu proudění, je tedy použit matematický model laminární. Rozložení rychlosti, tlaku a teploty je řízeno výše uvedenými diferenciálními rovnicemi. Kriteříem laminarity je Reynoldsovo číslo:

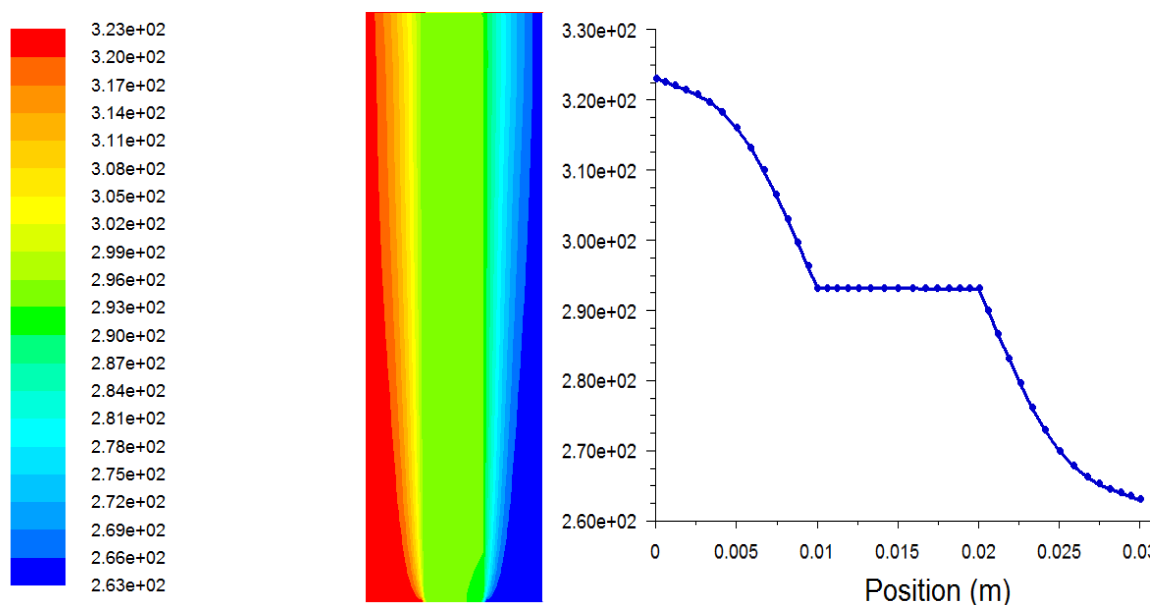
$$\text{Re} = \frac{u \cdot d}{\nu} = \frac{0.1 \cdot 0.1}{1.7894 \cdot 10^{-5}} = 629$$

Vytvoření geometrie a sítě

V prostředí Workbench se vytvoří přesná geometrie a vysítuje stejnou sítí pro tři obdélníky, viz obr. 3.6.

Výsledky výpočtu

Pro ilustraci se uvádějí možnosti vyhodnocení, tj. vyplněné izočáry teploty. Je vidět, že ocelí prostupuje teplo velmi dobře, ale nedojde k lineárnímu rozložení teploty napříč všech tří oblastí. V okolí materiálu (desky z oceli) je možno pozorovat typické rozložení teploty při obtékání tekutinou. Teplota není ustálená, protože tloušťka dvou krajních vrstev by měla být větší a navíc profil rychlosti se ještě patřičně nevyvinul z obdélníkového na ustálený parabolický, viz obr. 5.6.



obr. 5.6 Rozložení teploty [K] v ocelové desce, okolním vzduchu a ve vyhodnocovací rovině

Pro výpočet Nusseltova čísla a součinitele přestupu tepla a jsou použity referenční hodnoty. Referenční teplota pro levou stěnu je dána teplotou levé stěny a referenční rozměr je dán délkou ocelové desky. Nejdříve se součinitel přestupu tepla stěnou dle vztahu:

$$\tilde{\alpha} = \frac{q}{T_s - T_{ref}} \quad (5.5.1)$$

který je úměrný tepelnému toku a následovně Nusseltovo číslo

$$\text{Nu} = \frac{\alpha d_{ref}}{\lambda} \quad (5.5.2)$$

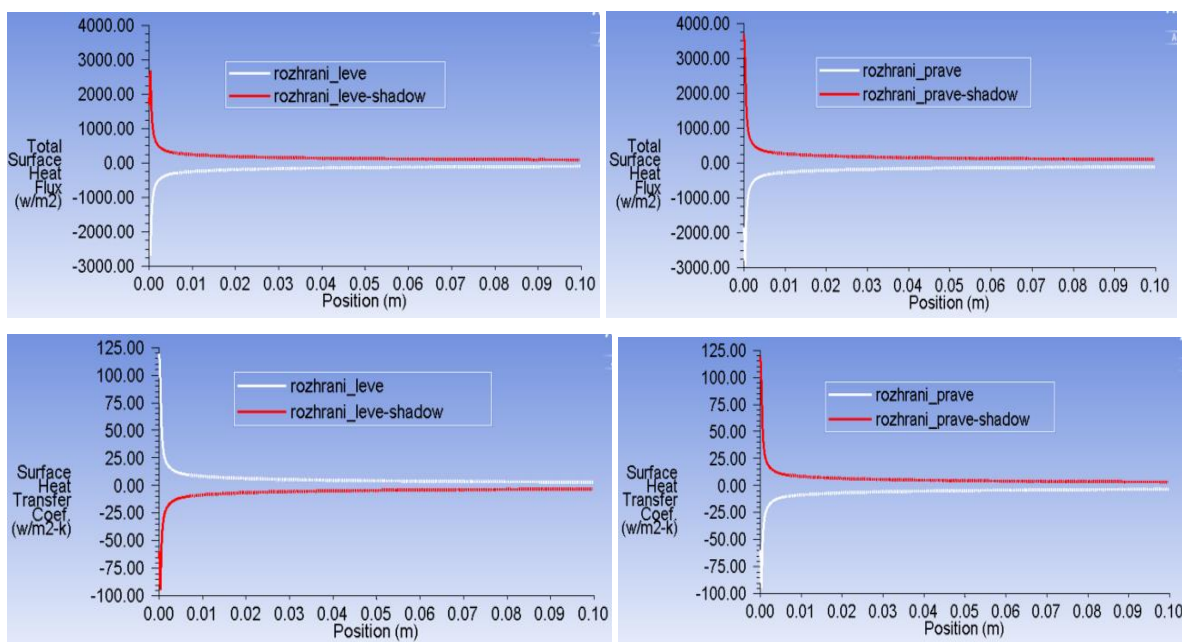
Pro pravou stěnu je postup analogický, jen referenční hodnoty teploty jsou jiné.

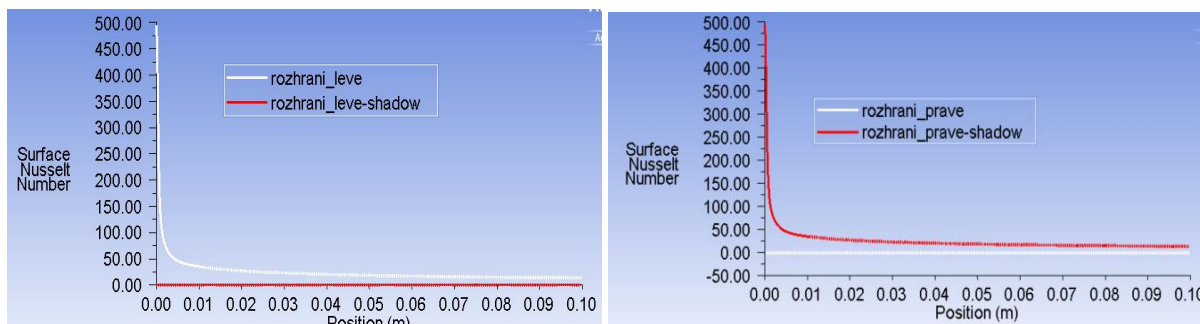
Referenční hodnoty

levá oblast	pravá oblast	
Reference Values	Reference Values	
Area (m ²) 1	Area (m ²) 1	Plocha stěny trubky
Density (kg/m ³) 1.225	Density (kg/m ³) 1.225	Hustota vzduchu
Depth (m) 1	Depth (m) 1	Délka desky
Enthalpy (j/kg) 0	Enthalpy (j/kg) 0	Entalpie
Length (m) 0.1	Length (m) 0.1	Rozměr oblasti vzduchu (Re)
Pressure (pascal) 0	Pressure (pascal) 0	Tlak
Temperature (K) 323	Temperature (K) 263	Teplota levé stěny
Velocity (m/s) 0.1	Velocity (m/s) 0.1	Rychlost vzduchu na vstupu
Viscosity (kg/m-s) 1.7894e-05	Viscosity (kg/m-s) 1.7894e-05	Viskozita vzduchu
Ratio of Specific Heats 1.4	Ratio of Specific Heats 1.4	Měrné teplo

obr. 5.7 Definování referenčních hodnot pro výpočet parametrů přestupu tepla a Nusseltova čísla

Na následujícím obr. 5.8 je rozložení tepelného toku, součinitele přestupu tepla a Nusseltova čísla na rozhraní vzduch - ocel a ocel - vzduch, kde je možno pozorovat opačnou orientaci tepelného toku na rozhraní. Dále je nutné vyhodnocovat tyto veličiny v buňkách na stěně, nikoliv uprostřed buněk.

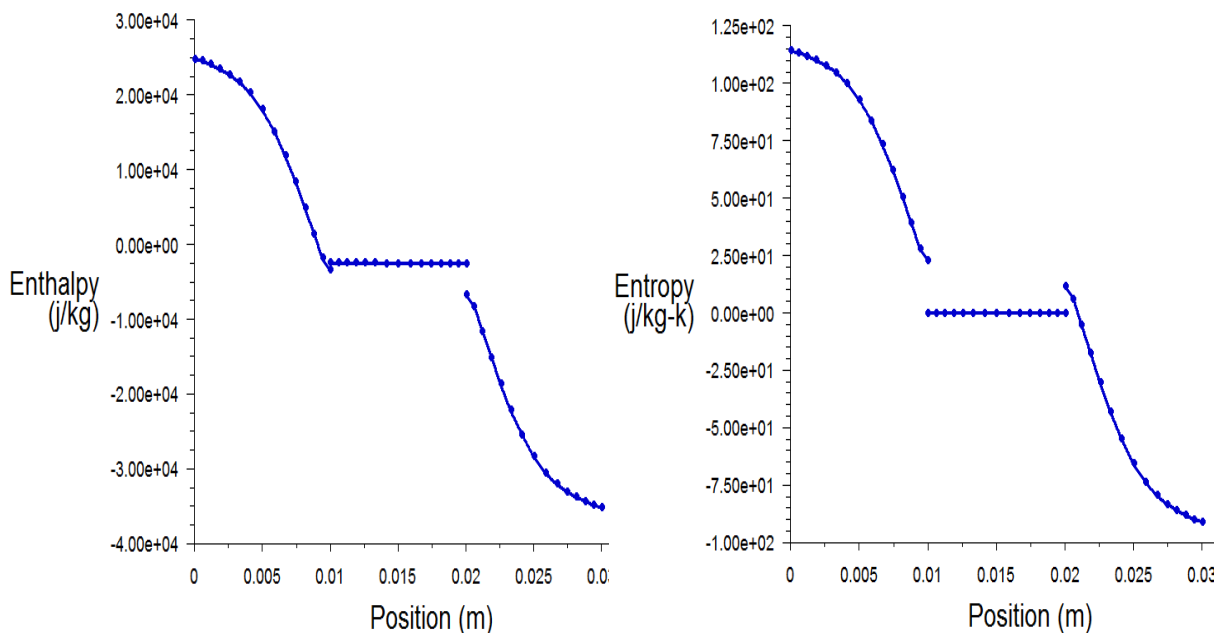




obr. 5.8 Rozložení tepelného toku, součinitele přestupu tepla a Nusseltova čísla na levých a pravých stěnách (počítaný Fluentem) pro $T_{ref}=323$ K a 263 K.

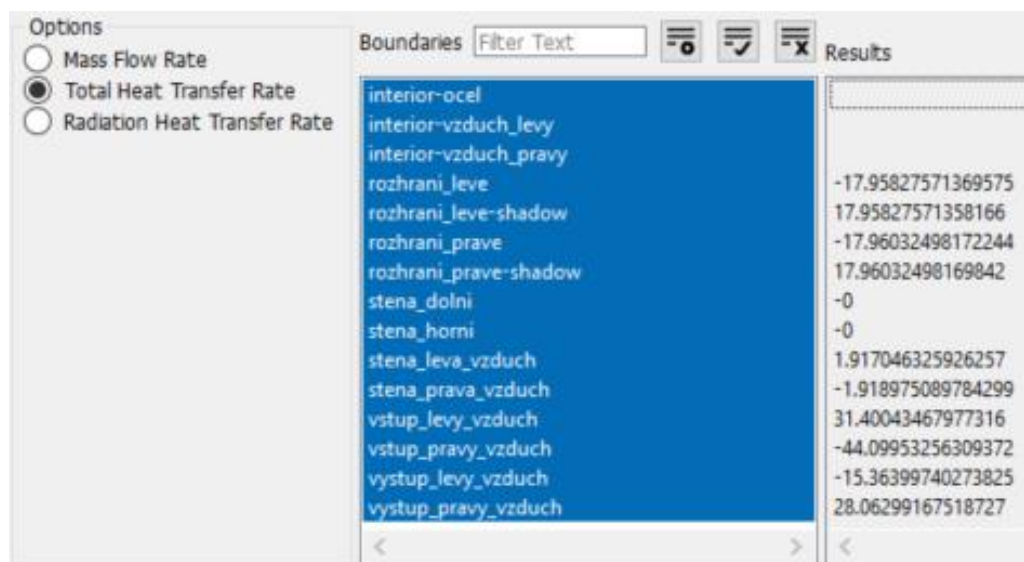
Součinitel přestupu tepla a Nusseltovo číslo závisí na referenčních hodnotách, které se prakticky velmi špatně určují a jsou závislé na měření, ve Fluentu jsou výsledkem a pro další výpočty nejsou potřebné. Vyhodnocení Nusseltova čísla na rozhraní nabývá dvou hodnot, přitom na jednom rozhraní je rovno nule. Tedy tato stěna nemá fyzikálně smysl, ale vždy je třeba udělat ověření, jestli je nulové Nusseltovo číslo na stěně nebo stěně_shadow při podmínce „coupled“.

Software Fluent vyhodnocuje výše uvedené veličiny za každých podmínek a uživatel musí zvážit, které veličiny mají fyzikální opodstatnění. CFX je v tomto smyslu ošetřen lépe.



obr. 5.9 Rozložení entalpie a entropie podél střední vyhodnocovací roviny

Pro praktické použití je možno získat průměrné hodnoty všech výše uvedených parametrů, ale z podrobného průběhu je třeba zvážit, jak přesný je vážený průměr. Vahou je plocha elementu sítě. Tepelný výkon na ploše je určen jednoznačně, viz obr. 5.10.



obr. 5.10 Hodnoty tepelného výkonu na jednotlivých stěnách.

Další parametry (Total Surface Heat Flux - celkový měrný tepelný tok q , Surface Heat Transfer Coefficient - součinitel přestupu tepla $\tilde{\alpha}$ a Nusselt number - Nusseltovo číslo Nu) se určují váženým průměrem.

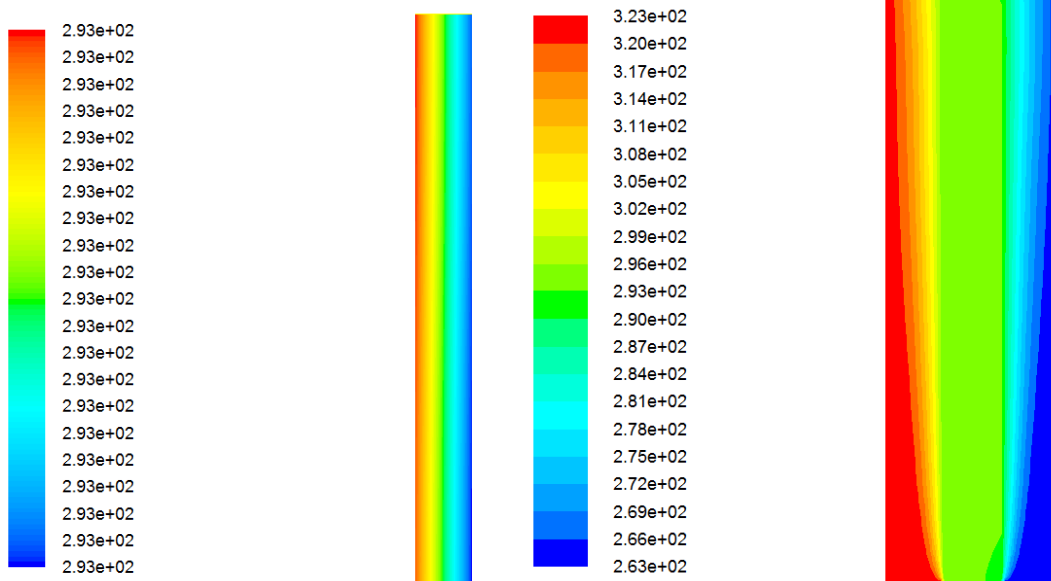
Tab. 5.4 Průměrné hodnoty (Area-Weighted Average) tepelného toku, odhadu koeficientu přestupu tepla a Nusseltova čísla

	Surface Heat Transfer Coef. [W·m ⁻² ·K ⁻¹] odhad	Nu odhad	Surface Heat Transfer Coef. [W·m ⁻² ·K ⁻¹] Fluent	Nu Fluent
stena-leva_vzduch			0	0
rozhraní_leve	5.14	19.5	6.00	24.8
rozhraní_leve_shadow			-6.00	0
stena-prava_vzduch			0	0
rozhraní_prave_shadow	5.5	20.9	6.00	24.8
rozhraní_prave			-6.00	0

Odlišnosti mezi odhadem Nusseltova čísla a součinitele přestupu tepla proti výpočtu

Fluentem jsou způsobené vlivem rozběhu proudu a krátkou zkoumanou oblastí ve směru proudění.

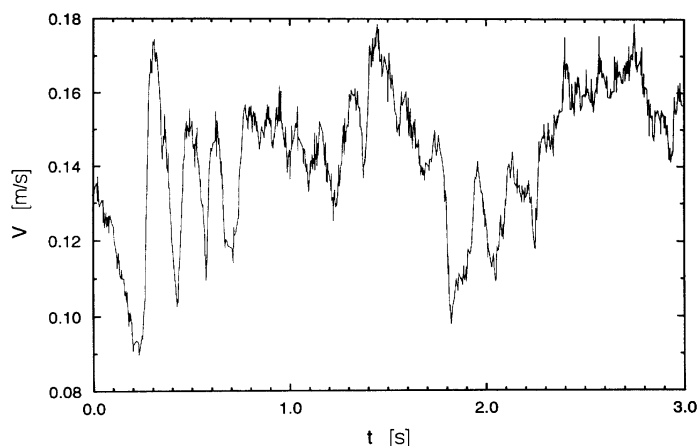
Pokud je určen průměrný součinitel přestupu tepla pro levou stěnu, je možno oblast zjednodušit tak, že nebude řešena levá část proudění se vzduchem a okrajová podmínka na levé stěně pro ocel bude dána součinitelem přestupu tepla a teplotou referenční, tj. 323 K a podobně na pravé stěně. Výsledkem je rozložení teploty prakticky o konstantní hodnotě, tj. 293 K, což je stejná hodnota teploty v oceli, jako na obr. 5.6.



obr. 5.11 Srovnání hodnot teploty [K] ve zjednodušené geometrii s okrajovou podmínkou součinitele přestupu tepla a v celé geometrii s prouděním

6. Turbulence

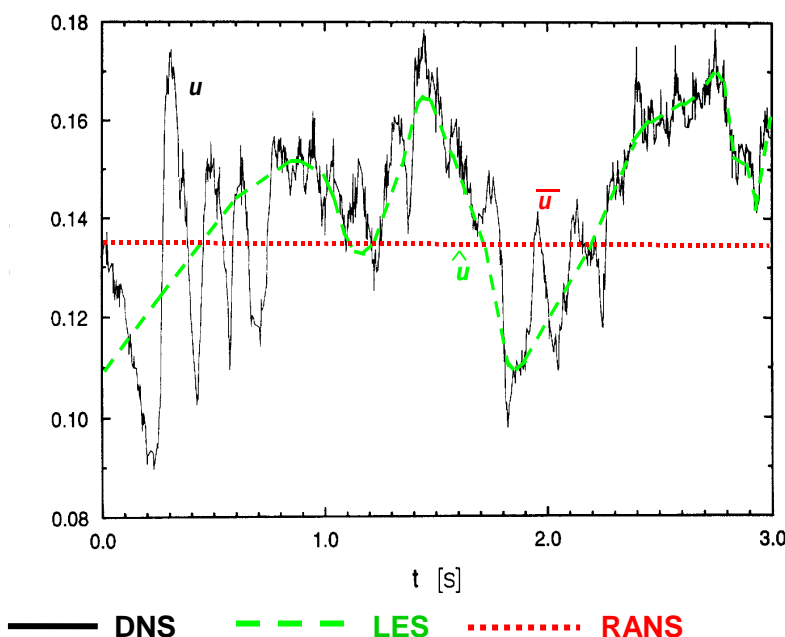
Proudění skutečných kapalin může být klasifikováno jako laminární nebo turbulentní proudění. Proudění se obecně nazývá turbulentní, jestliže jeho proměnné vykazují chaotické fluktuace jak v prostoru, tak v čase, viz obr. 6.1. Navzdory náhodnosti turbulence detailní studie ukazují, že turbulentní proudění sestává z prostorových struktur, které se obvykle nazývají „eddies“, (turbulentní víry)



obr. 6.1 Plně vyvinuté turbulentní proudění – rychlost jako funkce času [13]

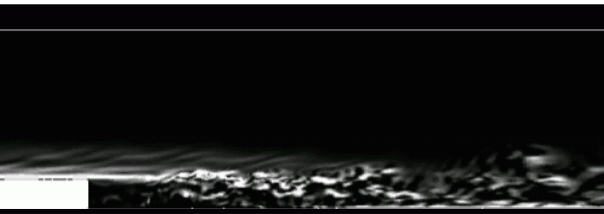
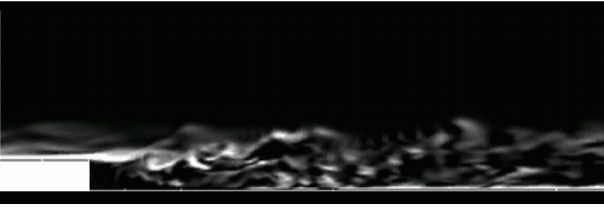
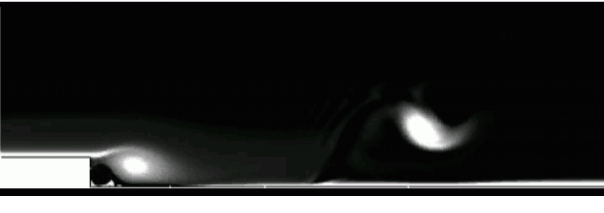
Modelování turbulence je stále ve stádiu výzkumu a vývoje, který se neustále mění s pokrokem v matematickém, fyzikálním a technickém odvětví. Při numerické simulaci turbulentního proudění existují tři teoreticky odlišné přístupy, které vyplývají ze zjednodušujících modifikací výchozích rovnic popisujících proudění [13].

- **Metoda přímé simulace** (DNS-Direct Numerical Simulation)
- **Metoda velkých vírů** (LES-Large Eddy Simulation)
- **Metoda časového středování** (RANS-Reynolds Averaged Navier-Stokes equations)



obr. 6.2 Metody modelování turbulence [13]

Pro většinu inženýrských úloh turbulentního proudění zůstávají nejpoužívanějším nástrojem **statistické modely turbulence**, které jsou založeny na **metodě časového (Reynoldsova) středování** (RANS-Reynolds Averaged Navier-Stokes equations) veličin turbulentního proudění a na následující proceduře časového středování bilančních rovnic.

<p>DNS je dána velkými nároky na kapacitu počítače z důvodu velmi jemné sítě. Počet uzlových bodů sítě lze odhadnout</p> $N_p \approx Re_l^{9/4}.$	
<p>LES je založena na modelování velkých vírů, jako prostorových časově závislých útvarů, které lze zachytit sítí. Turbulentní víry o malých měřítcích jsou parametrizovány tzv. subgridními modely.</p>	
<p>RANS jsou statistické modely turbulence, založené na metodě časového (Reynoldsova) středování veličin turbulentního proudění a na následující proceduře časového středování bilančních rovnic</p>	

Vzhledem k tomu, že např. ve strojrenských aplikacích je možno charakterizovat turbulentní struktury o rozměrech řádově mnohem menších, než jsou charakteristické rozměry oblasti a měnících se v čase řádově deseti tisíciny, je modelování všech detailů turbulentních struktur vzhledem k současným hardwarovým možnostem velmi omezené. Proto se v inženýrských aplikacích budeme zabývat pouze velkými víry a, především metodou časového středování.

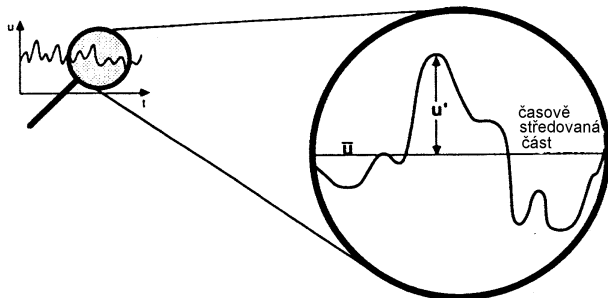
6.1. Reynoldsovo časové středování

Okamžité hodnoty veličin popisujících turbulentní proudění lze tedy rozložit na část časově středovanou $\bar{\zeta}$ a flukтуаční složku ζ' (viz obr. 6.3), přičemž platí [6]

$$\zeta = \bar{\zeta} + \zeta' \quad (6.1.1)$$

kde $\bar{\zeta} = \frac{1}{T} \int_0^T \zeta d\tau$ $\bar{\zeta}' = 0$ resp. $\bar{\zeta} = \frac{1}{N} \sum_i \zeta_i$. Pro počítání s časově středovanými

veličinami platí určitá pravidla, viz [6].



obr. 6.3 Fluktuace a časově středovaná část

Osborn Reynolds

Aplikací časového středování na základní rovnici kontinuity a Navierovy Stokesovy rovnice se získají tzv. Reynoldsovy rovnice, charakteristické tím, že jsou formálně podobné výchozím rovnicím, ale řešené proměnné jsou časově středované. Vzhledem k nelineárnosti Navierových Stokesových pohybových rovnic se v nich objevuje navíc člen, který odpovídá rozměrově napětí, je definován jako

$$\tau_{t-ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad (6.1.2)$$

Těchto členů je devět pro různé indexy a nazývají se Reynoldsova (turbulentní) napětí, která existují jen při turbulentním proudění. Projevují se tak jako viskózní napětí deformačními účinky na elementární objem tekutiny. Turbulentní napětí jsou novými neznámými veličinami v systému rovnic, proto je nezbytné je definovat. Nejčastěji používaný způsob je metoda Bousinesquovy hypotézy o vírové (turbulentní) viskozitě. Tato hypotéza předpokládá, že podobně jako při laminárním proudění, kdy platí v zjednodušeném dvourozměrném proudění pro smykové napětí Newtonův vztah, jsou turbulentní napětí a turbulentní toky úměrné gradientu střední rychlosti, teploty, koncentrace apod., tj.

laminární proudění
molekulová viskozita

$$\tau = \mu \frac{du_y}{dy}$$

Boussinesquova hypotéza
(analogie)



turbulentní proudění
vírová turbulentní viskozita

$$\tau_t = -\rho \overline{u'_x u'_y} = \mu_t \frac{\partial \overline{u}_y}{\partial y}$$

6.2. k-ε dvourovnicový model turbulence

V úlohách tepelných výměníků je třeba uvažovat nejobecnější rovnice vyjadřující zákony zachování ve smyslu nekonstantní hustoty, která může být závislá na teplotě i tlaku, a to jak

pro plyny, tak pro kapaliny. Navíc lze upřesnit vnější objemové síly. Tyto rovnice mohou být vyjádřeny jak v integrálním tvaru, tak v diferenciálním tvaru. Diferenciální tvar je obvyklejší v teorii mechaniky tekutin, takže bude prezentován tento zápis, který ale dle předchozí kapitoly bude řešen metodou konečných objemů, tedy v integrálním tvaru. Jak již bylo řečeno, předpokládá se turbulentní proudění, tedy rovnice budou definovány pro středované veličiny (tlak, rychlost), ale formálně budou analogické rovnicím pro laminární proudění:

- **rovnice kontinuity platná pro středované veličiny**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = S_z \quad (6.2.1)$$

- **tři Reynoldsovy rovnice** pro přenos hybnosti pro středované veličiny (Navierovy - Stokesovy rovnice upravené časovým středováním)

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\nabla \bar{p} + \rho \vec{a} + \nabla \cdot (\vec{\tau}_t) + S_m \quad (6.2.2)$$

- **rovnice pro turbulentní kinetickou energii** $k = \frac{1}{2} (\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2})$, přitom je možno zohlednit produkci turbulentní kinetické energie v důsledku napětí a vztlakových sil

$$\frac{\partial (\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u} k) = \nabla \cdot \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \nabla k \right) + \rho P - \rho \varepsilon \quad (6.2.3)$$

- **rovnice pro rychlost turbulentní disipace** $\varepsilon = \nu \frac{\partial u_i' \partial u_i'}{\partial x_j^2} = C_D \frac{k^{3/2}}{l}$, kde l je

délkové turbulentní měřítko

$$\frac{\partial (\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u} \varepsilon) = \nabla \cdot \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) + C_{1s} \rho P - C_{2s} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (6.2.4)$$

- dále je v modelu použita řada konstant určených empiricky

Pro doplnění jsou Reynoldsova napětí $\overline{u_i' u_j'}$ definována dle Boussinesquovy hypotézy vztahem

$$-\rho \overline{u_i' u_j'} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (6.2.5)$$

kde turbulentní viskozita μ_t se předpokládá jako funkce délkového a rychlostního měřítka dle Kolmogorov-Prandtlovy hypotézy:

$$\mu_t \approx l \bar{u} = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (6.2.6)$$

V jednotlivých aplikacích může být tento základní model rozšířen o další rovnice potřebné k řešení, jako je rovnice pro hmotnostní zlomky chemických látek a sloučenin, atd.

Standardní model $k-\varepsilon$ je vhodný pro proudění o vysoké turbulenci. Pro nízká Reynoldsova čísla se s výhodou využívá tzv. RNG $k-\varepsilon$ model. Ve Fluentu existuje řada dalších modelů turbulence, každý z nich je doporučen pro jiný typ proudění. Přesto je nutné mít k dispozici fyzikální experiment pro ověření alespoň některých parametrů proudění. Všechny modely turbulence využívají v blízkosti stěn stěnové funkce, které slouží k aproximaci turbulentního rychlostního profilu v blízkosti stěny.

6.3. Okrajové podmínky pro $k-\varepsilon$ turbulentní model

6.3.1. Turbulentní veličiny na hranici

Velký význam v souvislosti se vstupní okrajovou podmínkou má nastavení turbulentních parametrů v podobě hodnot **turbulentní kinetické energie** a **rychlosti disipace**. Přesnější je samozřejmě vyjádření těchto veličin profilem získaným z empirických dat nebo z empirických formulí. Pokud není profil přesně znám, lze zadat konstantní hodnotu odhadnutou na základě zkušenosti. Tyto turbulentní veličiny mohou být určeny případně pomocí veličin snadněji určitelných jako je intenzita turbulence, poměr turbulentní a molekulové viskozity, hydraulického průměru a délkového měřítka turbulence. Velikost turbulentních fluktuací se obvykle popisuje intenzitou turbulence. Za předpokladu izotropní turbulence ($\sqrt{u_1'^2} = \sqrt{u_2'^2} = \sqrt{u_3'^2}$) se vyjadřuje **relativní intenzita turbulence** jako **poměr efektivní hodnoty fluktuací složky rychlosti ke střední rychlosti** ve stejném místě proudu obvykle vyjádřený v procentech. Zpravidla se měří pouze jedna směrová složka:

$$I = \frac{\sqrt{u_1'^2}}{u_1} \quad (6.3.1)$$

Běžné turbulentní proudění je anizotropní (nesourodé v souřadnicových směrech), ale anizotropie bývá malá. Největší rozdíly jsou mezi podélnou a příčnou složkou pohybů. Obecně

$$I = \sqrt{\frac{u_j' u_j'}{3\bar{u}\bar{u}}}, \quad (6.3.2)$$

Rozdíl mezi fluktuacemi rychlostí v příčném směru u_2' a u_3' je zpravidla velmi malý. Hodnota intenzity je přibližně dána v Tab. 6.1.

Tab. 6.1

	I [%]
aerodynamický tunel	0.05%
turbulentní proudění generované mříží	1-5%

úplavy	2-10%
proudění v mezní vrstvě a při průtoku trubici	5-20%
zatopený proud	20%
recirkulační proudění s malou rychlostí \bar{u}	100%

Turbulentní měřítko l je omezeno velikostí oblasti, protože turbulentní víry nemohou být větší než je rozměr oblasti. Přibližná hodnota turbulentního měřítka se určí ze vztahu $l = 0.07L$ kde L je charakteristický rozměr oblasti, případně hydraulický průměr. Intenzita turbulence a hydraulický průměr jsou dostupné veličiny, které je možno zadat jako okrajové podmínky, ostatní se pak přepočítají dle následujících vztahů.

Tab. 6.2

intenzita turbulence	$I = \sqrt{\frac{u_j' u_j'}{3\bar{u}\bar{u}}}$
turbulentní měřítko	$l = 0.07L$
poměr turbulentní viskozity $\frac{\mu_t}{\mu}$	$\bar{v} = \sqrt{\frac{3}{2}\bar{u}.I.I}$
turbulentní kinetická energie	$k = \frac{3}{2}(u')^2$ nebo $k = \frac{3}{2}(\bar{u}I)^2$
rychlost disipace	$\varepsilon = C_\mu^{\frac{3}{4}} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l} = \rho C_\mu \frac{k^2}{\mu} \left(\frac{\mu_t}{\mu}\right)^{-1}$

Samozřejmě turbulentní energii a rychlost disipace lze definovat také přímo. Podle složitosti matematického modelu se definují také další veličiny související s přenosem tepla případně další skalární veličiny. Hodnota turbulentní intenzity v případě LES se definuje pomocí náhodné fluktuace rychlostního pole na vstupu.

6.3.2. Varianty turbulentních okrajových podmínek

V každém případě se musejí zadat dvě okrajové podmínky, protože počet rovnic pro turbulentní veličiny je roven 2. Je možné vybrat z následujících kombinací:

- Turbulentní kinetická energie + turbulentní disipace
- Intenzita turbulence + délkové měřítko turbulence
- Intenzita turbulence + poměr turbulentní a molekulové viskozity
- Intenzita turbulence + hydraulický průměr

Nejčastěji je používána poslední varianta, protože turbulentní hodnoty lze kvalifikovaně odhadnout. Pokud je dispozici měření turbulentních veličin, použije se další z možností.

6.3.3. Okrajové podmínky

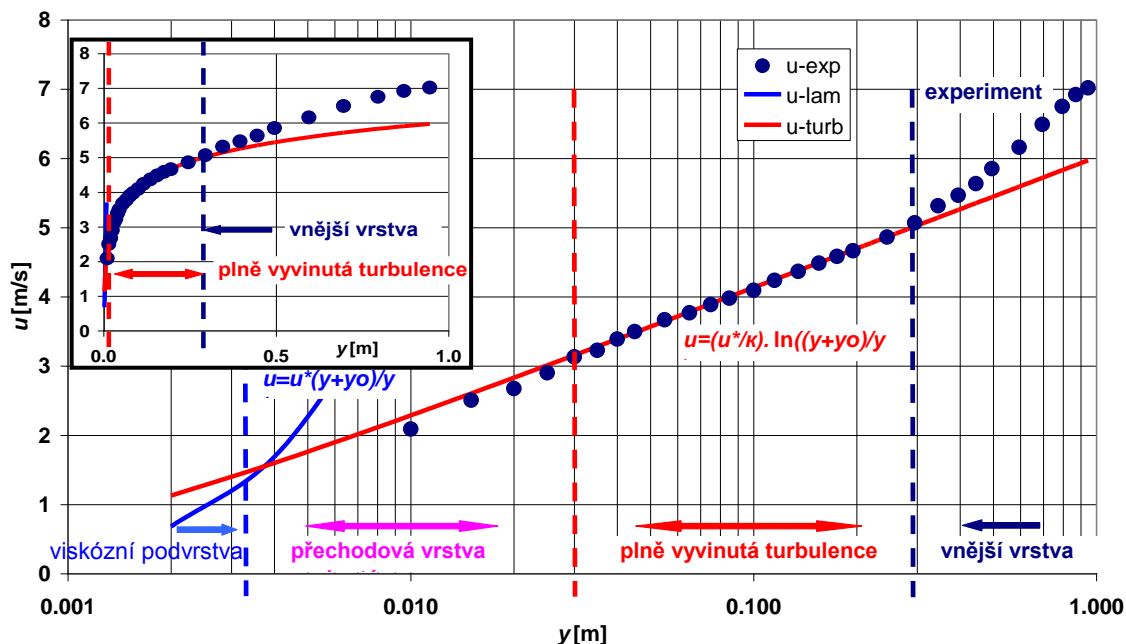
Na průtočných hranicích se tedy zadávají okrajové podmínky shodné s okrajovými podmínkami pro laminární proudění a navíc se ke každé variantě přidají turbulentní podmínky, přitom pro výstup to jsou podmínky pro případ zpětného proudění, jinak se počítají, viz Tab. 6.3.

Tab. 6.3

	Typ (Fluent)	Veličina	Jednotky
VSTUP	VELOCITY INLET	rychlost u intenzita turbulence / hydraulický průměr d_h	[ms ⁻¹] [%] [m]
	MASS FLOW RATE	hmotnostní průtok Q_m intenzita turbulence / hydraulický průměr d_h	[kgs ⁻¹] [%] [m]
	PRESSURE INLET	totální (celkový) tlak $p_{tot} = p_{stat} + p_{dyn} = p_{stat} + \frac{1}{2} \rho u^2$ intenzita turbulence / hydraulický průměr d_h	[Pa] [%] [m]
VÝSTUP	OUTFLOW	podmínka ustáleného proudu $\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \frac{\partial p}{\partial n} = 0$ intenzita turbulence / hydraulický průměr d_h	[%] [m]
	PRESSURE OUTLET	statický tlak p_{stat} (0 při proudění do atmosféry) intenzita turbulence / hydraulický průměr d_h	[Pa] [%] [m]
	MASS FLOW RATE	hmotnostní průtok Q_m intenzita turbulence / hydraulický průměr d_h	[kgs ⁻¹] [%] [m]
STĚNA	WALL	$u = 0$ předdefinováno (pohyblivá stěna), drsnost pro turbulentní proudění	
	WALL	Smykové napětí – kapalina ulpívá na stěně (no slip), lze zadat smykové napětí, drsnost pro turbulentní proudění).	

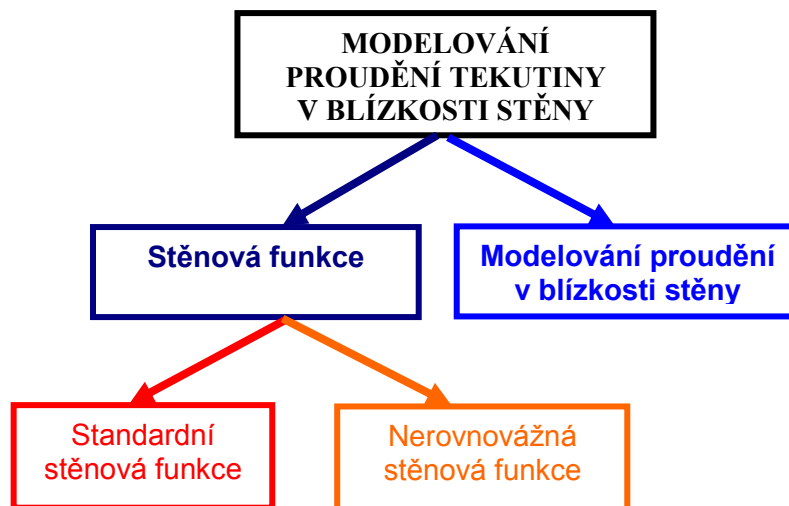
6.4. Stěnové funkce, možnosti zpřesnění výpočtu

Modelování proudění u stěny ovlivňuje přesnost numerického řešení v celé oblasti. V blízkosti stěny se řešené veličiny rychle mění, výrazně se zde uplatňuje přenos hybnosti a skalárních veličin. Turbulence je těsně u stěny potlačena. Ve vnější části mezní vrstvy však dochází k výrazné produkci turbulentní kinetické energie v důsledku Reynoldsových napětí a gradientu střední rychlosti. Četné experimenty prokázaly, že oblast u stěny, tzv. **mezní vrstva**, může být rozdělena na více částí. Bezprostředně u stěny se nachází **viskózní (laminární) podvrstva**, proudění je zde téměř laminární a molekulární viskozita má dominantní vliv na přenos hybnosti, tepla a hmotnosti. Vnější část mezní vrstvy se označuje jako **plně turbulentní vrstva**, dominantní úlohu zde hraje turbulence. Mezi laminární podvrstvou a plně turbulentní vrstvou se vyskytuje **přechodová vrstva**, kde se stejnou měrou uplatňují účinky molekulární viskozity i turbulence. Rozdělení mezní vrstvy je znázorněno na obr. 6.4.

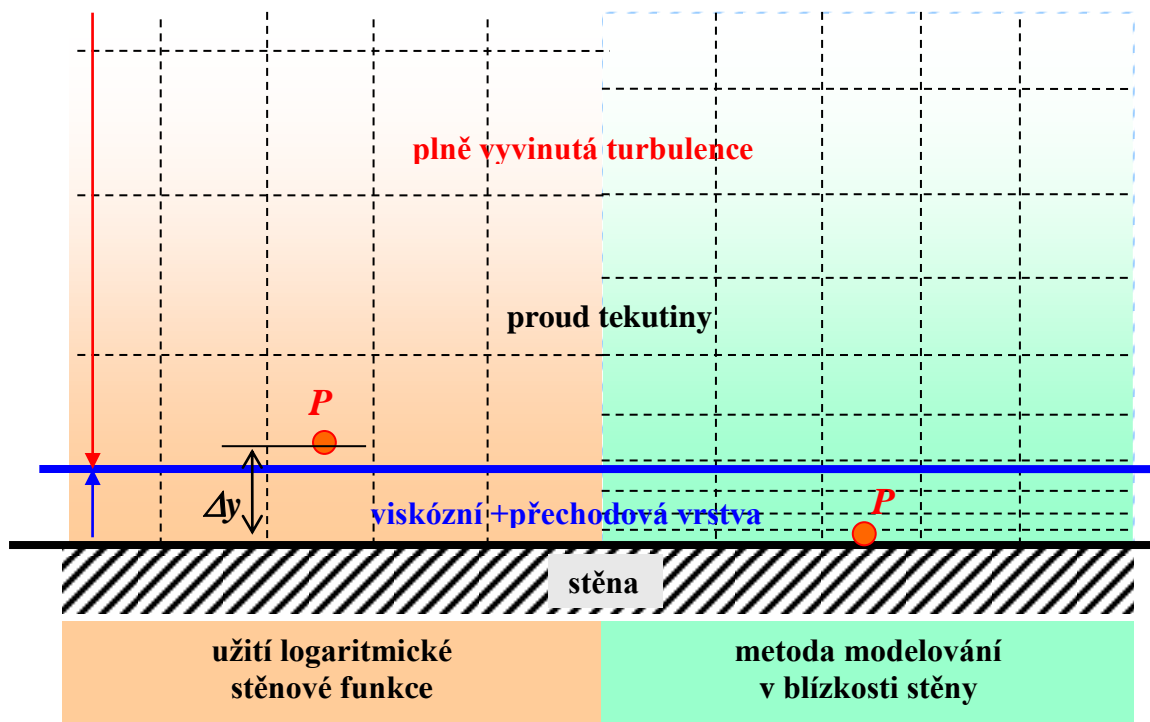


obr. 6.4 Rozdělení oblasti v blízkosti stěny – v lineárních a logaritmických souřadnicích

Proudění v blízkosti stěny modelované dvěma přístupy:



- **užití stěnové (logaritmické) funkce („wall function“)**, pomocí níž se překlene oblast laminární podvrstvy a přechodové vrstvy, kde se uplatňuje molekulární i turbulentní viskozita, tj. oblast mezi stěnou a oblastí plně vyvinutého turbulentního proudění.
- **modelování proudění v blízkosti stěny („near-wall modelling“)** včetně vazké podvrstvy v souvislosti s jemností sítě. Podstata obou přístupů je znázorněna na obr. 6.5.



obr. 6.5 Dva přístupy k modelování proudění u stěny ve Fluentu

Teorie stěnových funkcí dle Laundera a Spaldinga

Stěnové funkce vycházející z teorie Laundera a Spaldinga jsou široce používané hlavně pro průmyslové aplikace. V turbulentním proudění se mezní vrstva skládá z viskózní podvrstvy a tzv. oblasti logaritmického zákona pro středovanou rychlost v turbulentní oblasti ve zjednodušeném dvourozměrném případě:

$$\bar{u}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(E \cdot y^+) \quad (6.4.1)$$

Bezrozměrné veličiny v této rovnici jsou definovány takto:

$$\bar{u}^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau} \quad y^+ = \frac{\rho u_\tau y}{\mu} \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (6.4.2)$$

kde

- κ = von Kármánova konstanta (=0.42)
- E = empir. konstanta (=9.81)
- \bar{u} = střední rychlost proudění v bodě P
- u_τ = třecí rychlost
- y = vzdálenost bodu P od stěny ve směru normály
- μ = dynamická viskozita tekutiny

Třecí rychlost u_τ je určena pomocí smykového napětí

Podobné logaritmické funkce se používají i při výpočtu teploty v blízkosti stěny.

6.5. Vliv kvality sítě na volbu stěnové funkce pro různé modely turbulence

Vzdálenost středů buněk sousedících se stěnou od těchto stěn je určující pro to, je-li správný přístup logaritmické stěnové funkce nebo je třeba volit jiný.

- logaritmický předpis je platný pro $y^* > 30 \div 60$
- dvouvrstvý (Enhanced wall treatment) je platný pro $y^* < 4 \div 5$, v ideálním případě nejméně 10 buněk má být v laminární podvrstvě
- Spalart-Allmaras model využívá logaritmické stěnové funkce za předpokladu velmi jemné sítě ($y^* = 1$) nebo sítě, pro kterou je $y^* \geq 30$.

Určení bezrozměrné vzdálenosti y^* je možné až ve Fluentu, proto se zjemnění sítě provádí až zde příkazem ADAPT. Bude pak lépe zachycena mezní vrstva pro rychlostní a

teplotní profil a bude docházet k přesnějšímu výpočtu přestupu tepla mezi stěnou a kapalinou. Pro ilustraci budou také v příkladech vyhodnoceny rozdíly v tepelném toku a dalších veličinách řešené na hrubé a adaptované síti.

6.6. Výběr turbulentního modelu pro zpřesnění výpočtu

Základní problém výpočtu turbulentního smykového proudění spočívá v přítomnosti Reynoldsova napětí v rovnicích popisujících střední pohyb tekutiny, takže systém pohybových rovnic není uzavřen jako v případě laminárního proudění. Soubor přídatných rovnic a empirických vztahů, které společně s pohybovými rovnicemi tvoří řešitelný systém rovnic, se nazývá modelem turbulence. Výběr modelu turbulence závisí na typu proudění:

- úroveň turbulence, který je dán hodnotou Reynoldsova čísla. Při Reynoldsově čísle řádově 10^5 se jedná o vyvinuté turbulentní proudění a použije se standardní $k-\varepsilon$ model, a při nižších Reynoldsových číslech bude vhodná jiná varianta, např. RNG $k-\varepsilon$ model nebo $k-\omega$ model.
- jednoduché proudění vs. zavíření v oblasti. Při existenci zavíření a sekundárního proudění je opět vhodné použít RNG $k-\varepsilon$ model nebo $k-\omega$ model.
- výpočet přestupu tepla. V úlohách přestupu tepla ve výměnících apod., kdy proudění je dosti pomalé, je vhodné použít $k-\omega$ model.
- rychlost výpočtu. Nejrychlejší a nejstabilnější výpočet zajistí standardní $k-\varepsilon$ model.

Modely turbulence lze rozdělit do několika skupin. Pro jednoduchost jsou uvedeny nejčastěji používané modely, jejichž výběr je dán hodnotou Reynoldsova čísla a rychlostí výpočtu.

Tab. 6.1

$k-\varepsilon$ model	vysoká Re čísla
RNG $k-\varepsilon$ model	nižší Re čísla
$k-\varepsilon$ available model	
$k-\omega$ model	nížká Re čísla + přestup tepla

6.7. Obtékání trubky v příčném směru

6.7.1. Obtékání trubky – teorie, měření

Obtékání trubky a následně systému trubek je jednou ze základních úloh proudění a to problém typický pro řadu výměníků tepla. V úvodních kapitolách bude tato problematika rozebrána na obtékání jedné trubky konstantním proudem tekutiny a přestupem tepla následně na obtékání systému trubek.

Při řešení úlohy obtékání trubky lze vyhodnotit kromě základních fyzikálních veličin jako je rychlost a tlak a jejich statistického zpracování také Reynoldsovo číslo, Strouhalovo číslo (frekvenci největších odtrhávajících se vírových struktur), odporové koeficienty, místo odtržení mezní vrstvy, případně délku úplavu [17].

Reynoldsovo číslo

Působení proudového pole skutečné (vazké) tekutiny na obtékané těleso je závislé na hodnotě Reynoldsova čísla $Re = \frac{ud_h}{\nu}$. Základní rozdělení charakteru proudění okolo trubky při různých Reynoldsových číslech stanovil experimentálně Roshko [9]. Rozdělil proudění okolo trubky v závislosti na Reynoldsově čísle na následující oblasti:

Tab. 6.2

$40 < Re < 150$	stabilní oblast
$150 < Re < 300$	přechodová oblast
$300 < Re < 200\ 000$	nestabilní oblast

Podrobnější rozdělení je dosud vzhledem k charakteru turbulence problematické. Další zkoumané parametry jsou uvedeny v literatuře.

Strouhalovo číslo specifikuje dynamiku obtékání, tj. frekvenci odtrhávání vírů.

$$Sh = \frac{f d_h}{u} \quad (6.7.1)$$

Hodnota $Sh = 0.2$ umožňuje při dané geometrii (průměr), fyzikálních vlastnostech proudícího média (viskozita) určit frekvenci odtrhávaných vírů. Z toho plyne, že řešení je časově závislé, tj. v každém časovém okamžiku periody dané vztahem $T = \frac{1}{f}$ je proudové pole jiné. To je z hlediska numerického řešení i z hlediska globálního určení přestupu tepla nevýhodné. Přitom nelze časovou závislost opomenout, neboť úloha jako stacionární nekonverguje, ale konverguje v každém časovém kroku, který je např. setinou periody.

Existuje ale možnost najít řešení statisticky zprůměrované a tím odhadnout základní parametry přestupu tepla. Komplikovanější časově závislá metoda řešení se ale obejít nedá. Tento postup navíc odpovídá i experimentálnímu měření.

Měření takových časově závislých dějů je možno realizovat řadou měřicích přístrojů, jejichž výstupy lze zaznamenat jako časové řady do počítače. Patří mezi ně žárový anemometr CTA, Laser – Doppler anemometr LDA, Particle Image Velocimetry PIV atd. Na pracovišti k měření proudového pole za trubkou při obtékání vzduchem bylo použito zařízení Mini-CTA. Pro určení parametrů proudového pole bylo provedeno měření v určitých bodech za obtékanou trubkou (obr. 6.6), byl vykreslen profil střední hodnoty rychlosti a intenzity turbulence (obr. 6.7) a dále pro určení frekvence odtrhávání vírů byla časová řada vyhodnocena metodou FFT (obr. 6.8). Frekvence odtrhávání vírů byla $f = 105$ Hz.

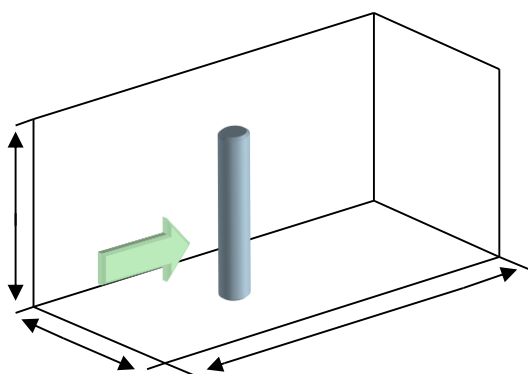
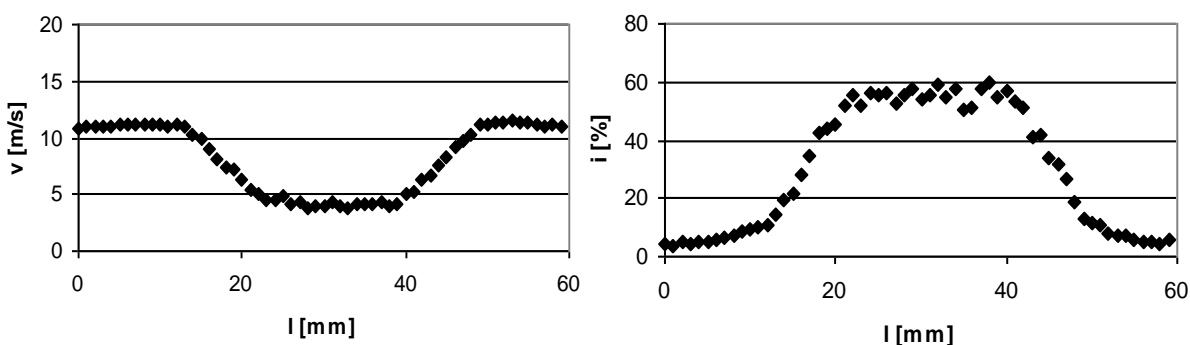


Schéma měřicí části [17]

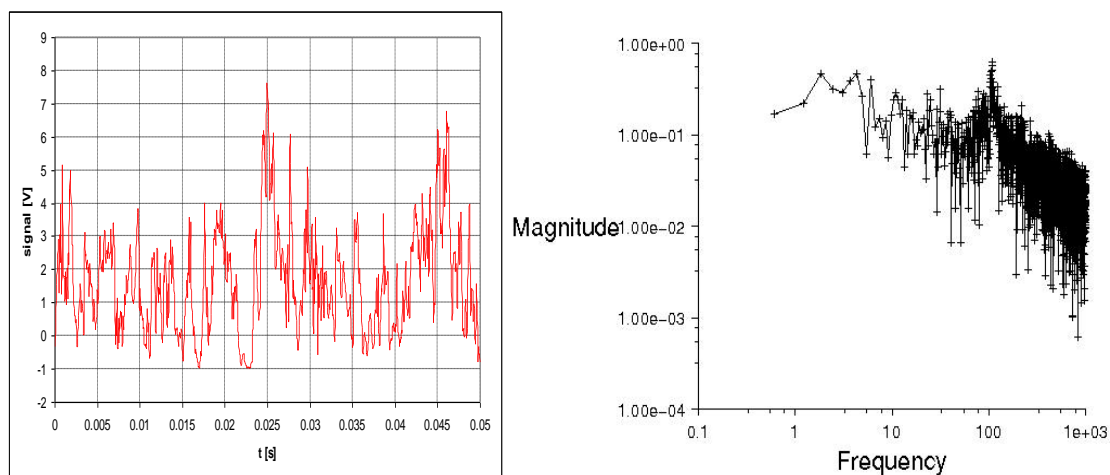
Fyzikální experiment:

průměr trubky:	20 mm
teplota vzduchu:	22 °C
hustota vzduchu:	1.225 kg·m ⁻³
viskozita vzduchu:	1.7894·10 ⁻⁵ Pa·s
Parametry proudění na vstupu do měřicí části tunelu:	
rychlost vzduchu	10 m·s ⁻¹
intenzita turbulence:	1.5 %

obr. 6.6 Schéma měřicí sekce a parametry proudění



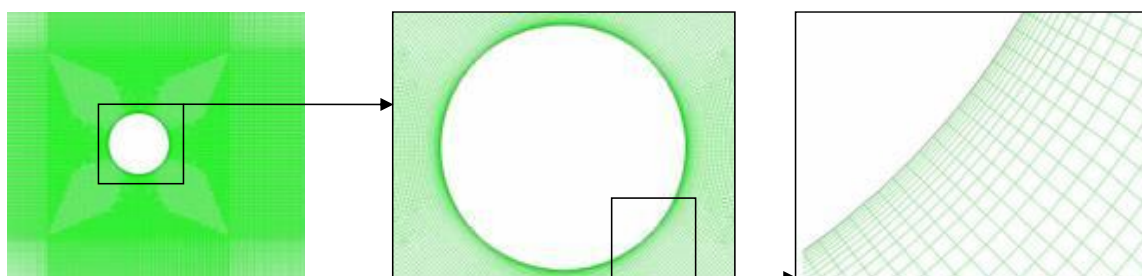
obr. 6.7 Rozložení střední hodnoty rychlosti intenzity turbulence v příčném řezu ve vzdálenosti 40 mm za trubkou [17]



obr. 6.8 Časový záznam rychlosti naměřený v bodě umístěném 40 mm za trubkou a 10 mm vedle osy trubky a spektrální výkonová hustota [17]

6.7.2. Obtékání trubky – numerické řešení

Z důvodu snadného testování byla úloha řešena nejprve jako 2D úloha v podélném řezu středem oblasti. Pro získání vyhovující přesnosti byla vytvořená síť symetrická podél osy a hlavně významně zhuštěná k hranici trubky, což je nutná podmínka nejen pro obtékání, ale i pro přestup tepla, viz obr. 6.9.



obr. 6.9 Vytvoření geometrie a sítě oblasti [17]

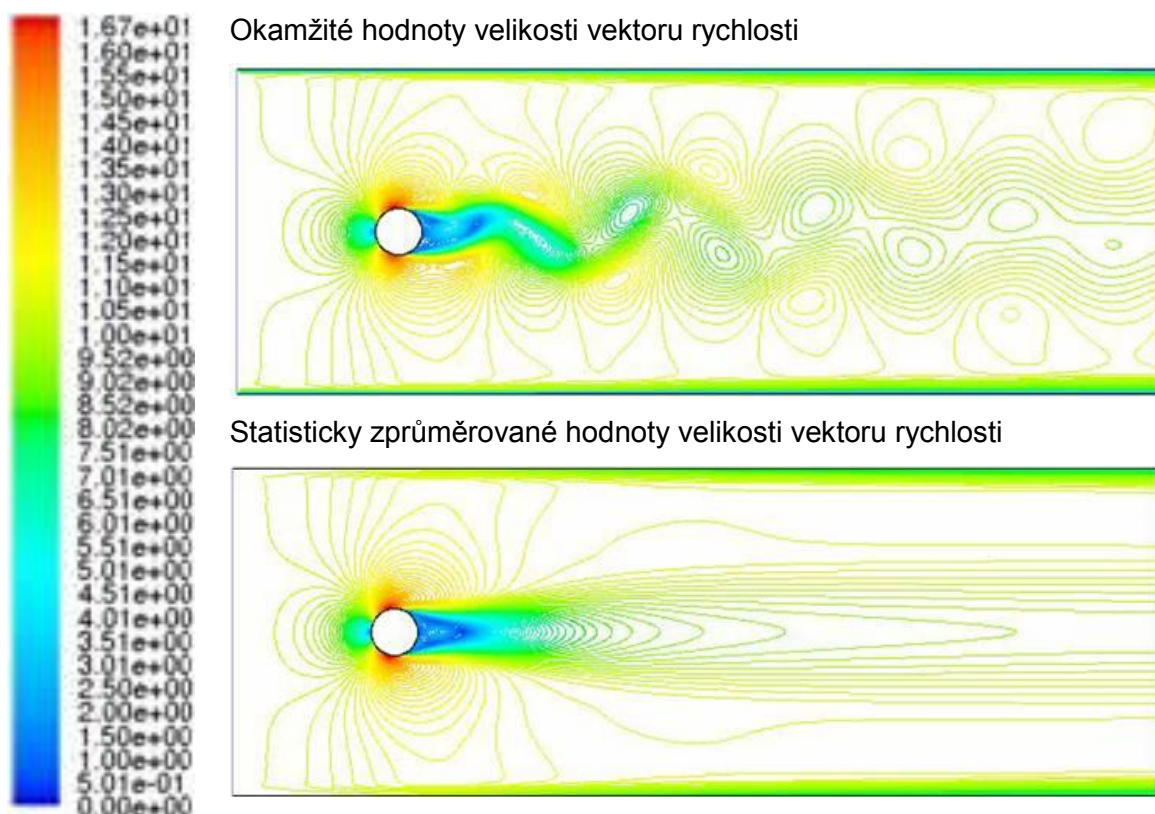
Stacionární okrajové podmínky byly nastaveny dle fyzikálního experimentu, viz Tab.

6.3

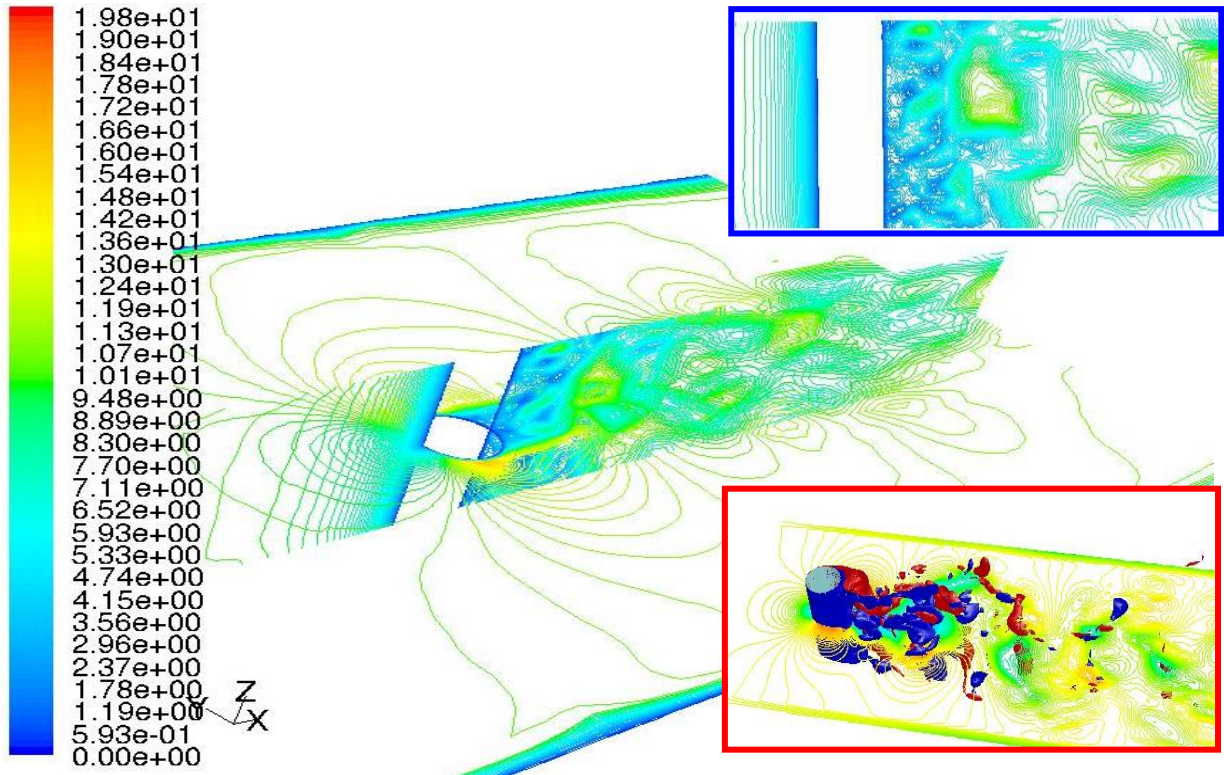
Tab. 6.3

průměr vložené trubky [mm]	20
rychlost vzduchu [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$]	10
okolní teplota vzduchu [$^{\circ}\text{C}$]	22
hustota vzduchu [$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$]	1.225
viskozita vzduchu [$\text{Pa}\cdot\text{s}$]	$1.7894\cdot 10^{-5}$
intenzita turbulence v měřicí části tunelu [%]	1.5

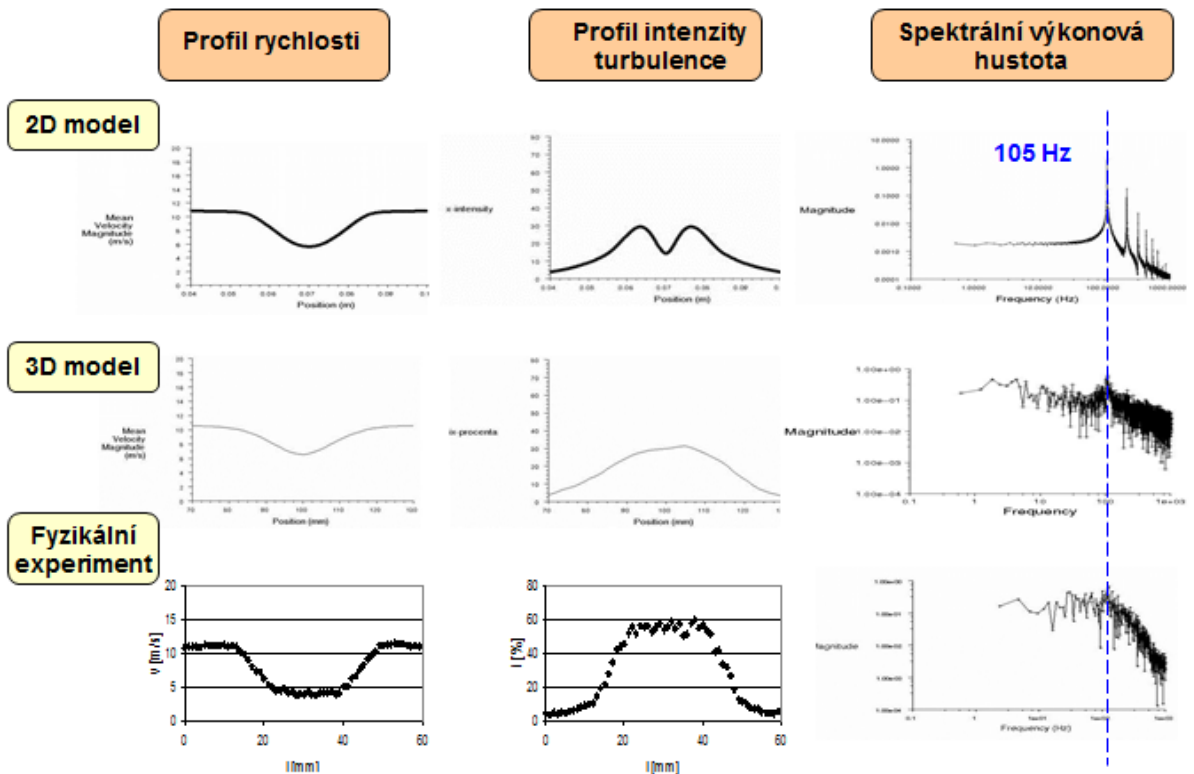
Byla testována řada matematických modelů za účelem kvalitních výsledků pro konfrontaci s experimentem, pro ilustraci byl zde vybrán RNG $k-\varepsilon$ turbulentní model. Výsledky byly vyhodnoceny formou okamžitých hodnot i časově středovaných, viz obr. 6.10. Při použití kvalitnějších numerických modelů a při modelování ve 3D geometrii je numerický výsledek ještě komplikovanější, neboť proudění vykazuje vírové struktury i ve směru osy trubky, viz obr. 6.11. Při vyhodnocení spektrální výkonové hustoty se však mnohem lépe shoduje s experimentem (obr. 6.12).



obr. 6.10 Velikost vektoru rychlosti – velocity magnitude [17]



obr. 6.11 3D model – zobrazení velikosti vektoru rychlosti v ose, detail a prostorové zobrazení [17]

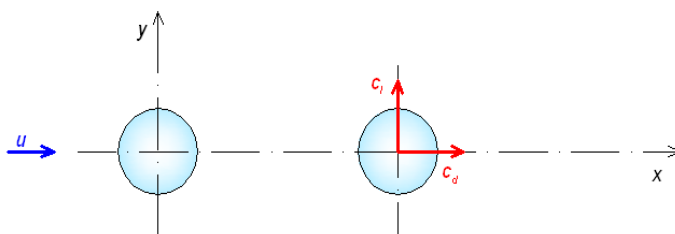


obr. 6.12 Srovnání experimentu a modelu [17]

6.7.3. Obtékání dvou trubek

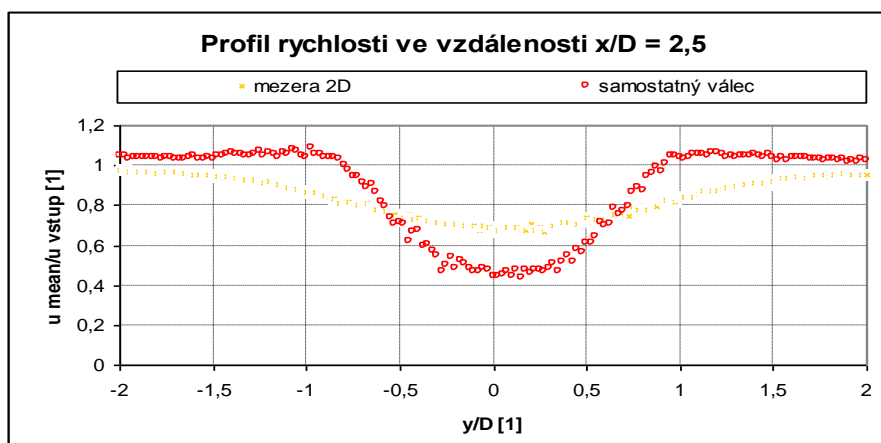
Při obtékání dvou nebo více trubek proudění a přestup tepla závisí na tom, jaký průměr trubky mají, jaká je rychlost proudění a v jaké vzdálenosti jsou umístěné. Vše ale závisí na osvědčených postupech a zkušenostech konstruktérů. Modelování tyto návrhy zhodnotí a případně z toho vyplynou nové možnosti při konstrukci.

Pro tuto úlohu byl nejprve připraven fyzikální experiment. Veškeré přípravy a nastavení bylo stejné jako u úlohy obtékání válce v předcházející kapitole. Jediná odlišnost vůči této úloze byla v tom, že do měřicí sekce byl vložen ještě druhý válec o stejném průměru tj. $D = 20$ mm. Mezera mezi válci byla nastavena na hodnotu $2D$ tj. 40 mm.

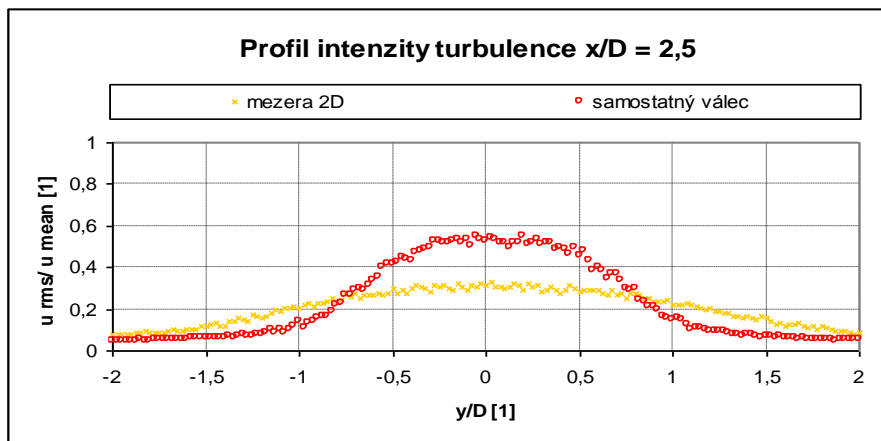


obr. 6.13 Schématické zobrazení modelované úlohy [17]

Ve vzdálenosti $x/D = 2,5$ byl opět proměřen profil rychlosti a intenzity turbulence za samostatným válcem a za dvěma válci, viz obr. 6.14 a obr. 6.15, jak pro účel vzájemného srovnání, tak pro účel srovnání s matematickým modelem.

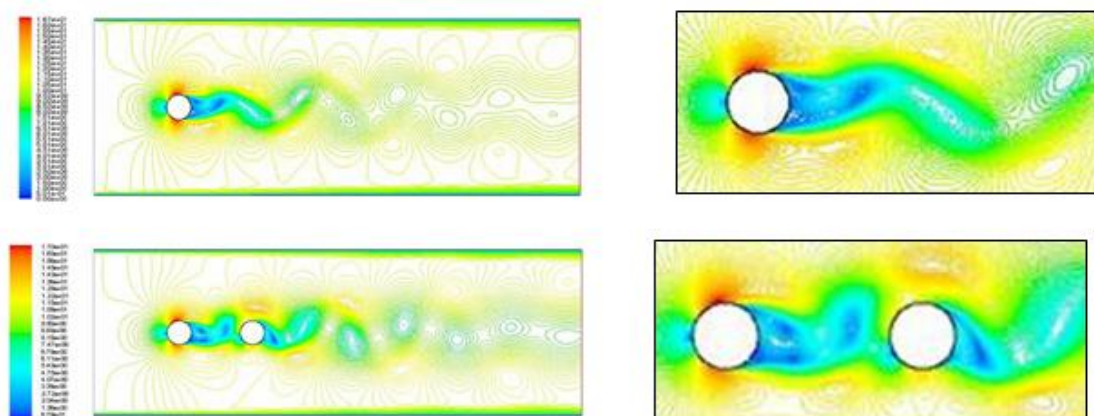


obr. 6.14 Profil střední rychlosti [17]



obr. 6.15 Profil intenzity turbulence [17]

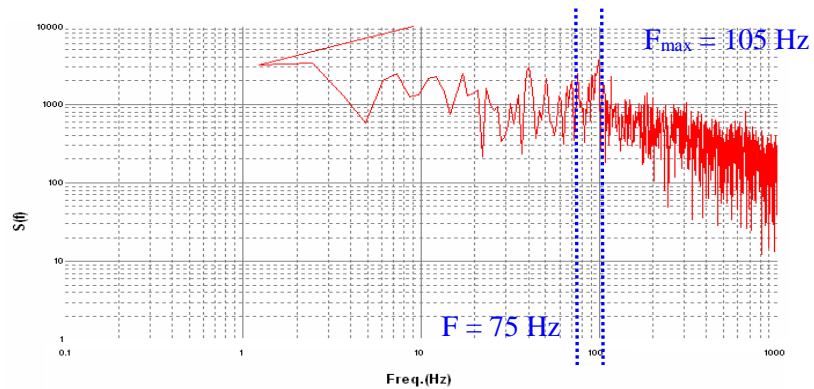
Pro ilustraci je na obr. 6.16 zobrazeno proudění a frekvence odtrhávání za druhou trubkou při numerickém testování.



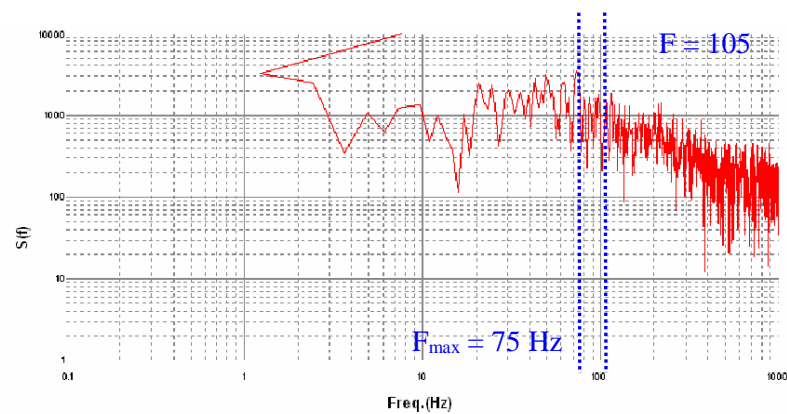
obr. 6.16 Vizuální srovnání velikosti vektoru okamžité rychlosti při obtékání jednoho a dvou trubek [17]

Zůstává otázkou, zda se změní také dominantní frekvence, při které dochází k přenosu největšího množství energie. Odpověď na tuto otázku je na obr. 6.17, kde je provedeno srovnání výkonových spekter získaných z měření ve vzdálenosti $X=[25;10]$ za samostatným válcem a za druhým válcem ve dvojici.

a) CTA
 $x/D=1,25$
 za
 samostatným
 válcem



b) CTA
 $x/D=1,25$
 za druhým
 válcem ve dvojici



obr. 6.17 Srovnání výkonového spektra měření pomocí CTA [17]

Srovnání ukazuje na patrnou změnu první frekvence, při které dochází k největšímu přenosu energie. Její hodnota je nižší, 75 Hz. Z hlediska vlivu na konstrukci je mnohem nebezpečnější, než vyšší vlastní frekvence.

Stejné informace byly získány z numerického experimentu.

7. Přenos tepla kondukcí a konvekcí při turbulentním proudění

7.1. Rovnice energie při turbulentním proudění

Rovnice energie je analogická rovnici energie při laminárním proudění, ale je definována pro časově středovanou energii resp. teplotu, přitom rychlosti a napětí jsou také časově středované

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{E}) + \nabla \cdot (\vec{u}(\rho \bar{E})) = \nabla \cdot (\lambda_t \nabla \bar{T}) - \nabla \cdot (\vec{\tau}_t \cdot \vec{u}) + S_h \quad (7.1.1)$$

λ_t je turbulentní tepelná vodivost úměrná turbulentní viskozitě.

7.2. Matematický model turbulentního proudění s konvekcí a kondukcí

Při řešení přenosu tepla současně s konvekcí a kondukcí při turbulentním proudění, což je ve velké většině případů, bude využito následujícího systému rovnic

- rovnice kontinuity pro časově středované stavové veličiny
- rovnice pohybové - při turbulentním proudění Reynoldsovy pohybové rovnice pro časově středované stavové veličiny
- rovnice pro turbulentní kinetickou energii a turbulentní disipaci
- rovnice energie pro časově středované stavové veličiny

Řešení je doplněno okrajovými podmínkami. Přesnost řešení nezáleží na tvaru řešené oblasti, pouze na kvalitě vytvořené sítě. S výhodou se využívá zjednodušení při symetrických a osově symetrických oblastech.

Na následujících více či méně jednoduchých příkladech typických pro energetické aplikace bude demonstrováno využití výhod numerické metody konečných objemů.

7.3. Okrajové podmínky

Okrajové podmínky pro turbulentní proudění se doplní podmínkami specifickými pro přenos tepla. V následující tabulce jsou nejčastěji používané okrajové podmínky.

Tab. 7.1

	Typ (Fluent)	Veličina	Jednotky
VSTUP	VELOCITY INLET	rychlost u intenzita turbulence / hydraulický průměr d_h teplota T	[ms ⁻¹] [%] [m] [K]

	MASS FLOW RATE	hmotnostní průtok Q_m intenzita turbulence I hydraulický průměr d_h teplota T	[kgs ⁻¹] [%] [m] [K]
	PRESSURE INLET	totální (celkový) tlak $p_{tot} = p_{stat} + p_{dyn} = p_{stat} + \frac{1}{2} \rho u^2$ intenzita turbulence I hydraulický průměr d_h teplota T	[Pa] [%] [m] [K]
VÝSTUP	OUTFLOW	podmínka ustáleného proudu $\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \frac{\partial p}{\partial n} = 0$ intenzita turbulence I hydraulický průměr d_h gradient teploty $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$	[%] [m]
	PRESSURE OUTLET	statický tlak p_{stat} (0 při proudění do atmosféry) intenzita turbulence I hydraulický průměr d_h teplota T	[Pa] [%] [m] [K]
	MASS FLOW RATE	hmotnostní průtok Q_m intenzita turbulence I hydraulický průměr d_h teplota T	[kgs ⁻¹] [%] [m] [K]
STĚNA	WALL	$u = 0$ předdefinováno (pohyblivá stěna – zadá se rychlost - např. rotující nebo klouzající), teplota T hustota tepelného toku q nulová hustota tepelného toku $q=0$ konvekce	
	WALL	Smykové napětí – kapalina ulpívá na stěně (no slip), (lze zadat smykové napětí, drsnost pro turbulentní proudění). teplota T hustota tepelného toku q nulová hustota tepelného toku $q=0$ konvekce	

7.4. Přenos tepla při turbulentním obtékání desky

V návaznosti na zkušenosti s modelováním přestupu tepla při laminárním obtékání desky bude využita stejná geometrie s tím, že prostřední vrstva bude opět materiál SOLID (ocel), ale levá i pravá strana bude FLUID (bude zde proudit vzduch a voda v turbulentním režimu).

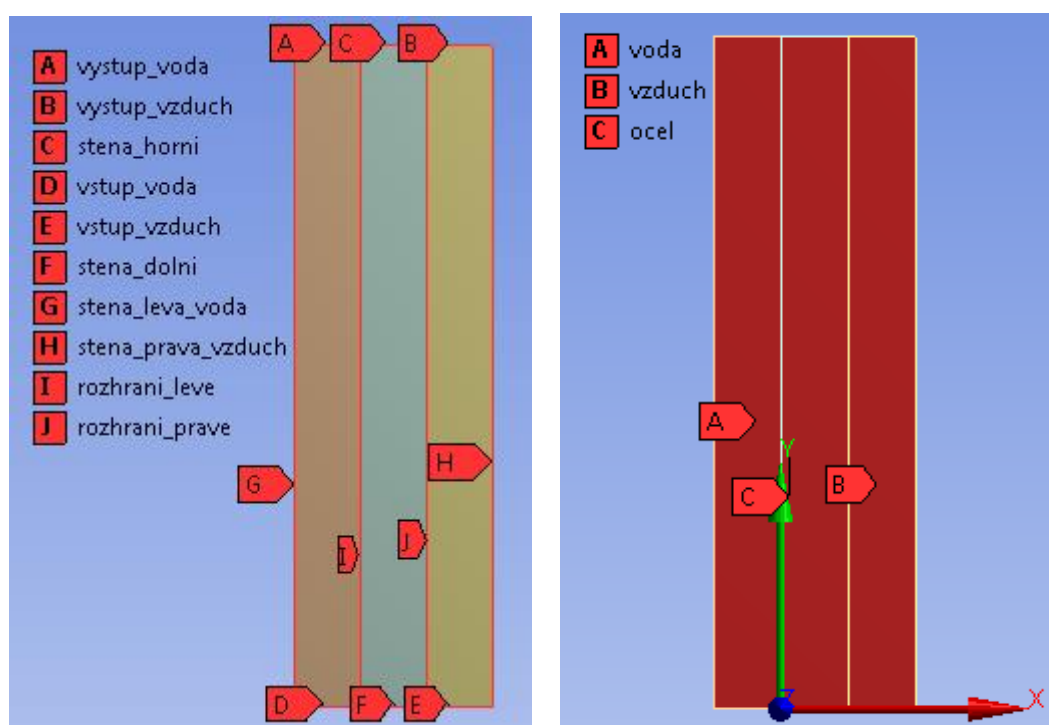
Řešte rozložení teploty v důsledku kondukcce a konvekce ve vrstvě oceli, která bude z levé strany obtékána vodou a z pravé strany vzduchem. Fyzikální model je dán tvarem oblasti, jejíž schéma ve 2D je zobrazeno na obr. 7.1 a rozměry s fyzikálními vlastnostmi v Tab. 7.2 a Tab. 7.3

Tab. 7.2 Geometrie oblasti

tloušťka oblasti $l_{voda} = l_{ocel} = l_{vzduch}$ [m]	0.01
výška oblasti h [m]	1

Tab. 7.3 Fyzikální vlastnosti materiálu (ocel, vzduch, voda) při 300 K

materiál	ocel	vzduch	voda
hustota ρ [$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$]	8030	1.225	998.2
měrná tepelná kapacita c_p [$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$]	502.48	1006.43	4182
tepelná vodivost λ [$\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$]	16.27	0.0263	0.6
viskozita η [$\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$]		$1.7894\cdot 10^{-05}$	0.001003



obr. 7.1 Schéma rozměrné obtékané desky v souřadném systému a okrajové podmínky

Okrajové podmínky

Okrajové podmínky jsou definovány na stěně vlevo a vpravo teplotou, tj. varianta A z minulého příkladu. Na vstupech pro vodu a vzduch je definována rychlost a na výstupech

tlak. Zároveň se zde definují turbulentní okrajové podmínky variantou hydraulický průměr a intenzita turbulence. Vzhledem k velké rozměrnosti desky jsou nahoře a dole definovány stěny s nulovým tepelným tokem, ale může to být i podmínka symetrie. Mezi proudícím plynem a deskou je rozhraní, kde se řeší přestup tepla, viz kap. 5.5.

U všech typů stěn se zadává tloušťka stěny. Pokud je stěna hranicí, její tloušťka je nula, pokud je to reálná stěna, lze zadat tloušťku (3 mm).

Tab. 7.1 Okrajové podmínky

název	Typ (Fluent)	T [K]	u [m·s ⁻¹]	p [Pa]	d _h [m]	I[%]
stena leva voda	wall	323				
stena prava vzduch	wall	263				
vstup voda	velocity inlet	323	1		1	1
vstup vzduch	velocity inlet	263	10		1	1
výstup voda	pressure outlet	323		0	1	1
výstup vzduch	pressure outlet	263		0	1	1
stena horni	wall	293				
stena dolni	wall	293				
rozhrani leve	coupled					
rozhrani leve shadow	coupled					
rozhrani prave	coupled					
rozhrani prave shadow	coupled					

Odhad bezrozměrných parametrů proudění

Pro výpočet byly použity vzorce pro turbulentní obtékání desky, viz kap. 1.4. Výpočty jsou provedeny pro obtékání desky vodou zleva, při obtékání desky vzduchem zprava se odhady liší z důvodu změny fyzikálních vlastností proudícího média a teploty.

Výpočty - voda (zleva)

Reynoldsovo číslo Re= 1000000
 Prandtlovo číslo Pr= 6.96
 Nusseltovo číslo Nu= 4878
 součinitel přestupu α = 2927

Výpočty - vzduch (zprava)

Reynoldsovo číslo Re= 629327
 Prandtlovo číslo Pr= 0.77
 Nusseltovo číslo Nu= 1620
 součinitel přestupu α = 42.61

Matematický model

V této úloze dochází k turbulentnímu proudění. Rozložení rychlosti, tlaku a teploty je řízeno výše uvedenými diferenciálními rovnicemi. Kritériem turbulence je Reynoldsovo číslo:

$$\text{Re}_{\text{vzduch}} = \frac{ud}{\nu} = \frac{10.1}{1.46073 \cdot 10^{-5}} = 629\,327$$

$$\text{Re}_{\text{voda}} = \frac{ud}{\nu} = \frac{1.1}{10^{-6}} = 1\,000\,000$$

Hodnota Reynoldsova čísla je vyšší než limitní, tedy se jedná o turbulenci nebo spíše o přechod od laminarity do turbulence. Proto byl zvolen turbulentní model vhodnější pro úlohy s nízkým Reynoldsovým číslem a pro řešení přestupu tepla, tj. $k-\omega$ model.

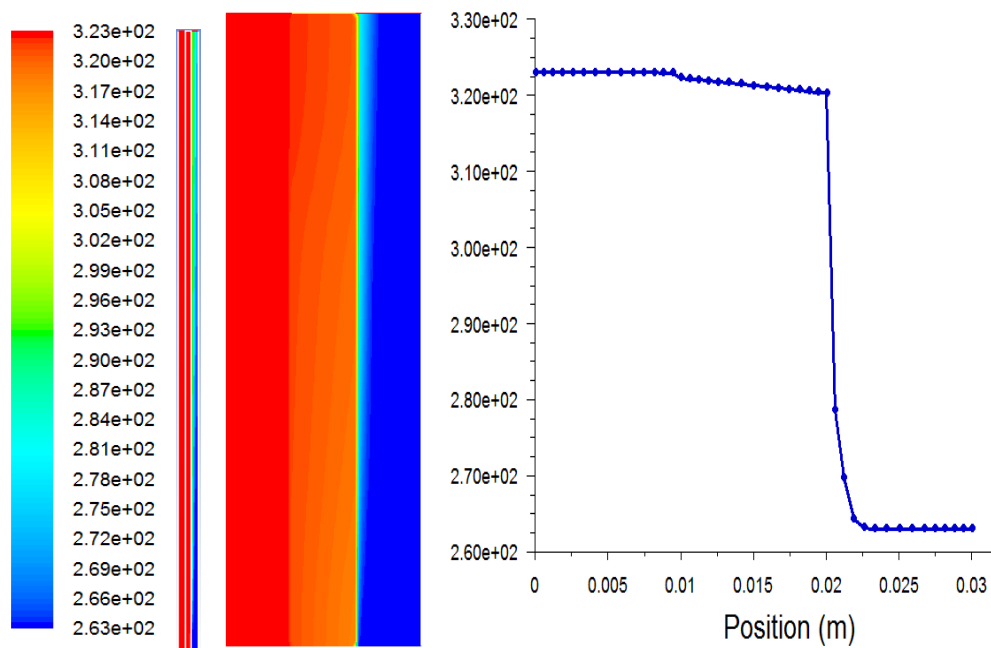
Vytvoření geometrie a sítě

V prostředí Workbench se vytvoří přesná geometrie kopírováním geometrie pro jeden materiál, tedy vytvořením tří vrstev, viz kap. 5.5.

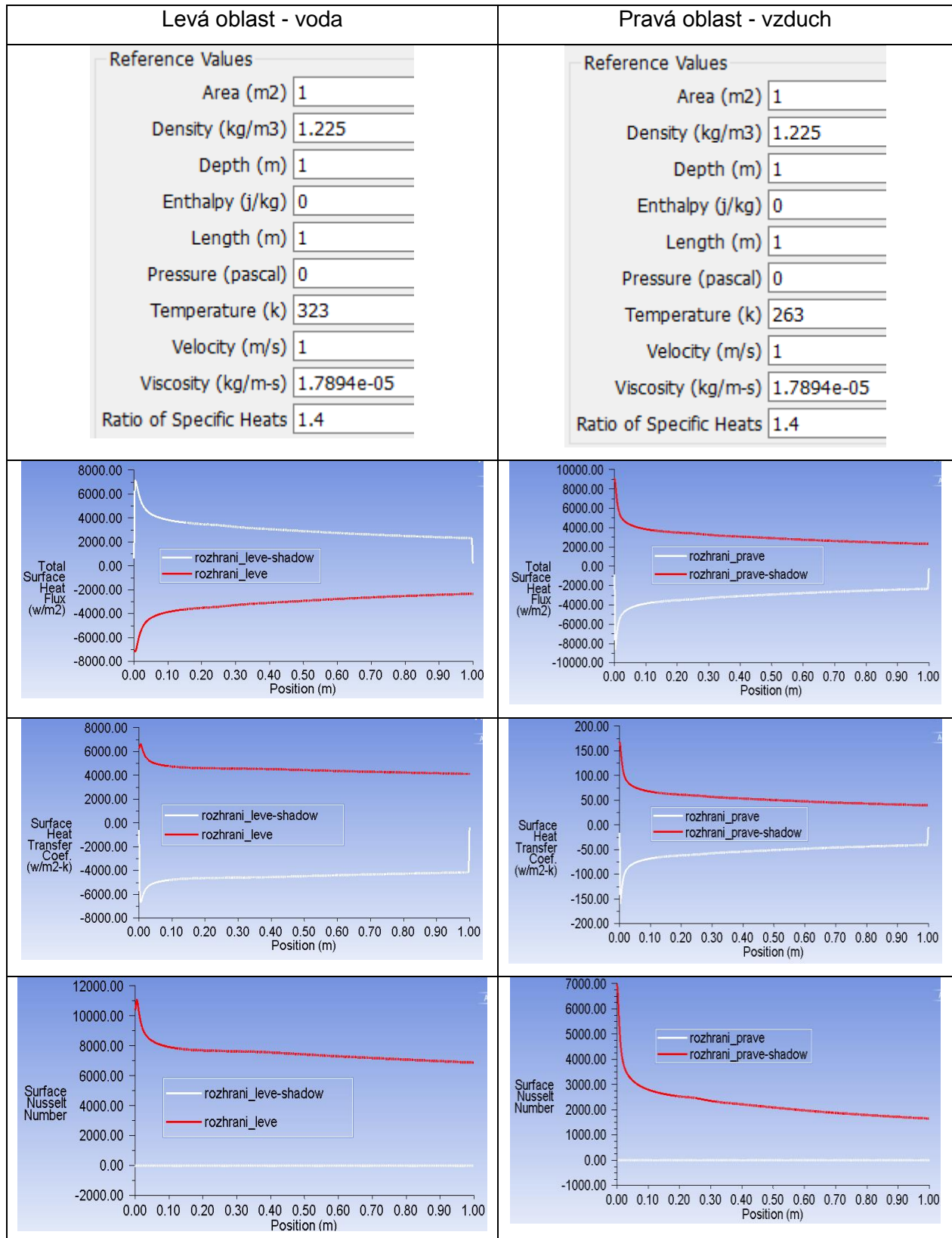
Výsledky výpočtu

Možnosti vyhodnocení jsou stejné jako v příkladu pro obtékání desky při laminárním proudění, proto budou zobrazeny jen některé významné veličiny, jako je teplota a profily veličin charakterizujících přestup tepla přes stěnu z oceli. Dále budou vyhodnoceny turbulentní veličiny a turbulentní fyzikální vlastnosti.

Na obr. 7.2 je zobrazeno rozložení teploty ve vrstvě vzduchu, oceli a vody. Je vidět, že opět vzduch působí jako dobrý izolant.



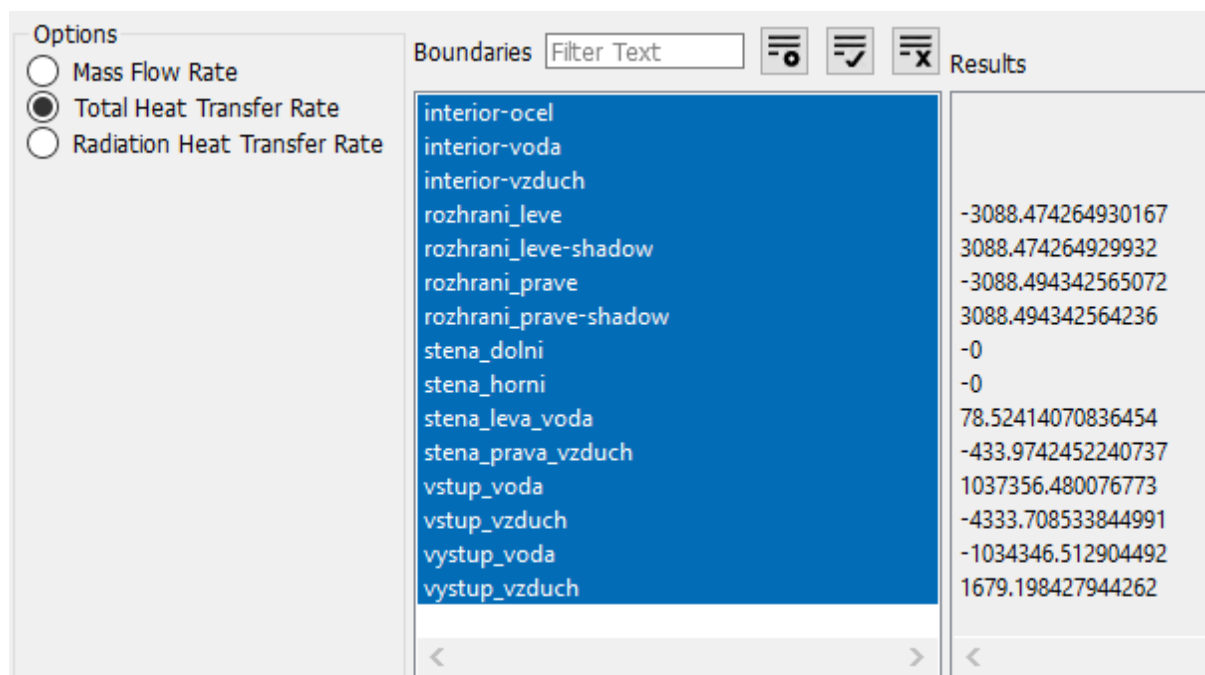
obr. 7.2 Rozložení teploty [K] ve vrstvě vzduchu, oceli a vodě a v detailu a ve vyhodnocovací rovině



obr. 7.3 Rozložení tepelného toku, součinitele přestupu tepla a Nusseltova čísla podél levých a pravých stěn, $T_{ref}=323$ K a 263 K, $d_h=1$ m

Další parametry (Total Heat Transfer Rate - celkový tepelný výkon P , Surface Heat Transfer

Coefficient - odhad součinitel přestupu tepla α a Nusselt number - Nusseltovo číslo Nu) se určují také váženým průměrem.



obr. 7.4 Tepelný výkon

Pro zjednodušené praktické aplikace bude mít smysl vyhodnotit střední (průměrné) hodnoty těchto veličin a porovnat je s odhady, viz Tab. 7.4.

Tab. 7.4

Střední hodnota	voda		vzduch	
	vlevo odhad	vpravo odhad	vlevo Fluent	vpravo Fluent
Vstup rychlost	1	10	1	10
Tepelný výkon tepla [W] Total Heat Transfer Rate			3088	3088
Součinitel přestupu tepla [$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$] Surface Heat Transfer Coef.	2927	42	4507	53
Nusseltovo číslo [1]	4878	1620	7512	2228

Rozdílné hodnoty jsou způsobené vlivem konstantních okrajových podmínek proudění a tudíž vlivem rozběhu proudu na vstupu do oblasti.

7.5. Obtékání trubky s přestupem tepla (bez proudění uvnitř)

Výše definovaný problém obtékání trubky bude nyní doplněn o řešení přestupu tepla. Tedy geometrie je shodná s předešlou úlohou. Navíc je definována teplota obtékajícího vzduchu, teplota stěny. Přitom proudění trubkou se zatím z důvodu zjednodušení nepředpokládá, ale je řešitelné, jak bude vidět v dalších kapitolách.

Tento prvek je základním kamenem celé řady trubkových výměníků, proto byly vytvořeny poloempirické teorie, které umožňují definovat významné parametry proudění, jako je:

Reynoldsovo číslo

$$\text{Re} = \frac{u_{ref} d}{\nu} \quad (7.5.1)$$

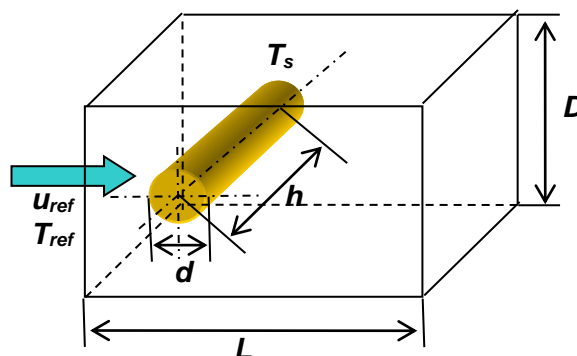
Prandtlovo číslo je poměr viskózní a tepelné difúze a je pouze závislé na materiálových vlastnostech tekutiny.

$$\text{Pr} = \frac{\rho c_p \nu}{\lambda} \quad (7.5.2)$$

Nusseltovo číslo je dáno:

laminární, přechodové a turbulentní příčné obtékání trubky	$\text{Nu} = C_1 \text{Re}^{C_2} \text{Pr}^{0,38}$		
	Re	C1	C2
	0,4 ÷ 4	0,989	0,330
	4 ÷ 40	0,911	0,385
	40 ÷ 4 000	0,683	0,466
	4 000 ÷ 40 000	0,193	0,618
	40 000 ÷ 400 000	0,0266	0,805

Řešte turbulentní obtékání vyhřívané trubky, vyhodnoťte vliv sítě a turbulentního modelu na výsledky, které porovnejte s empirickými odhady. Oblast definujte ve 2D dle schématu na obr. 7.5



obr. 7.5 Definování oblasti při obtékání trubky vzduchem s přestupem tepla

Geometrické a fyzikální parametry trubky a okolí s proudícím vzduchem jsou dány tabulkami.

Tab. 7.5 Geometrické a fyzikální parametry trubky

průměr	$d_{ref} =$	0.0127	m	délka	$h =$	0.094	m
plocha stěny trubky	$S =$	0.00375	m ²	teplota stěny	$T_s =$	128.4	°C

Tab. 7.6 Geometrické a fyzikální parametry okolí s proudícím vzduchem

Okolí							
výška	$D =$	0.06	m	délka	$L =$	0.1	m
Vlastnosti vzduchu							
hustota	$\rho =$	1.23	kg·m ⁻³	teplota	$T_{ref} =$	26.2	°C
rychlost	$v_{ref} =$	10	m·s ⁻¹	viskozita dyn.	$\eta =$	1.78E-05	Pa·s
viskozita	$\nu =$	1.59E-05	m ² ·s ⁻¹	tepelná	$\lambda =$	0.0242	W·m ⁻¹ ·K ⁻¹
kinematická				vodivost			
měrné teplo	$c_p =$	1066.6	J·kg ⁻¹ ·K ⁻¹	teplotní	$a =$	2.25E-05	m ² ·s ⁻¹
				vodivost			

Ze zadaných parametrů lze spočítat výše uvedené parametry proudění a přestupu tepla.

Odhad součinitele prostupu tepla stěnou je pak určen z Nusseltova čísla $Nu = \frac{\alpha d}{\lambda}$ vztahem

$$\alpha = \frac{Nu \lambda}{d}.$$

Tab. 7.7

Reynoldsovo číslo	$Re =$	7992
Prandtlovo číslo	$Pr =$	0.68
Nusseltovo číslo	$Nu =$	38.86
součinitel přestupu tepla	$\alpha =$	80.47 W·m ⁻² ·K ⁻¹

Pro numerické řešení je vybrán 2D model a výsledky budou konfrontovány s výpočty typickými pro takové úlohy, jako je bezrozměrný parametr Reynoldsovo, Prandtlovo a Nusseltovo číslo a dále součinitel přestupu tepla.

Matematický model

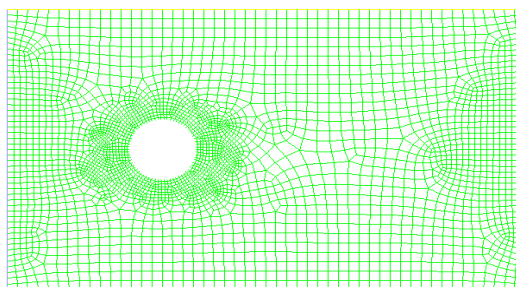
V této úloze dochází k turbulentnímu proudění, je tedy použit matematický model $k-\omega$. Kritériem turbulence je Reynoldsovo číslo, které je dáno rychlostí vzduchu, jeho viskozitou a průměrem válce:

Reynoldsovo číslo $Re = 7992$ turbulentní proudění

Hodnota Reynoldsova čísla je vyšší, ale jedná se přechod z laminarity do turbulence.

Vytvoření geometrie a sítě

V prostředí Workbench se vytvoří přesná geometrie, ale s ohledem na další využití pro modelování přestupu tepla s prouděním v trubce je vytvořena jednodušší síť, viz obr. 7.6.



obr. 7.6 Síť pro 2D geometrii obtékání válce

Výsledky výpočtu

Možnosti vyhodnocení jsou stejné jako v předchozích příkladech, proto budou zobrazeny jen některé významné veličiny. Pro výpočet Nusseltova čísla a součinitele prostupu tepla je nutné aktualizovat referenční hodnoty, které jsou použity pro vyčíslení jak součinitele přestupu tepla, tak Nusseltova čísla. Odhad součinitele přestupu tepla stěnou se určí opět dle vztahu:

$$\alpha = \frac{q}{T_s - T_{ref}} \quad (7.5.3)$$

a následovně Nusseltovo číslo

$$Nu = \frac{\alpha d_{ref}}{\lambda} \quad (7.5.4)$$

Referenční hodnoty jsou definovány následovně:

Problem Setup

- General
- Models
- Materials
- Phases
- Cell Zone Conditions
- Boundary Conditions
- Mesh Interfaces
- Dynamic Mesh
- Reference Values

Solution

- Solution Methods
- Solution Controls
- Monitors
- Solution Initialization
- Calculation Activities
- Run Calculation

Results

- Graphics and Animations
- Plots
- Reports

Reference Values

Compute from

Reference Values

Area (m ²)	<input type="text" value="0.00375"/>	
Density (kg/m ³)	<input type="text" value="1.225"/>	
Depth (m)	<input type="text" value="0.094"/>	
Enthalpy (j/kg)	<input type="text" value="0"/>	
Length (m)	<input style="border: 2px solid red;" type="text" value="0.0127"/>	
Pressure (pascal)	<input type="text" value="0"/>	
Temperature (k)	<input style="border: 2px solid red;" type="text" value="299.35"/>	
Velocity (m/s)	<input type="text" value="10"/>	
Viscosity (kg/m·s)	<input type="text" value="1.5894e-05"/>	
Ratio of Specific Heats	<input type="text" value="1.4"/>	

Reference Zone vzduch

Plocha stěny trubky

Hustota vzduchu

Délka válce

Entalpie

Průměr válce (Re)

Tlak

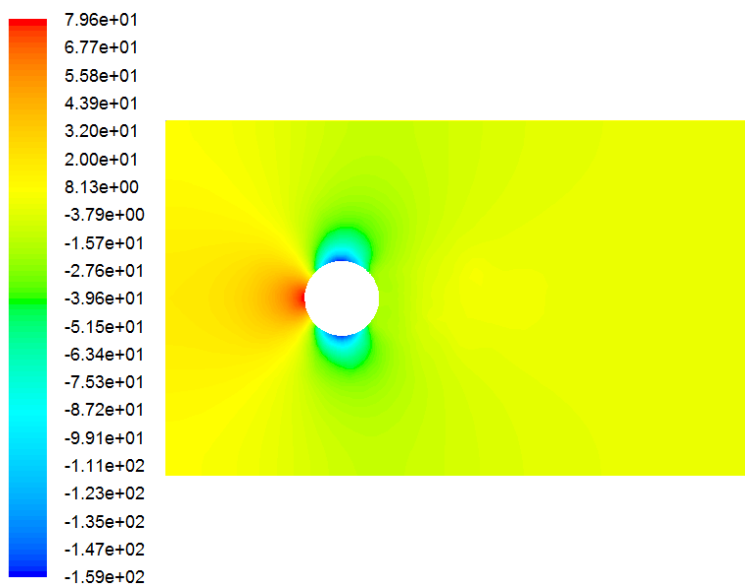
Teplota vzduchu na vstupu

Rychlost vzduchu na vstupu

Viskozita vzduchu

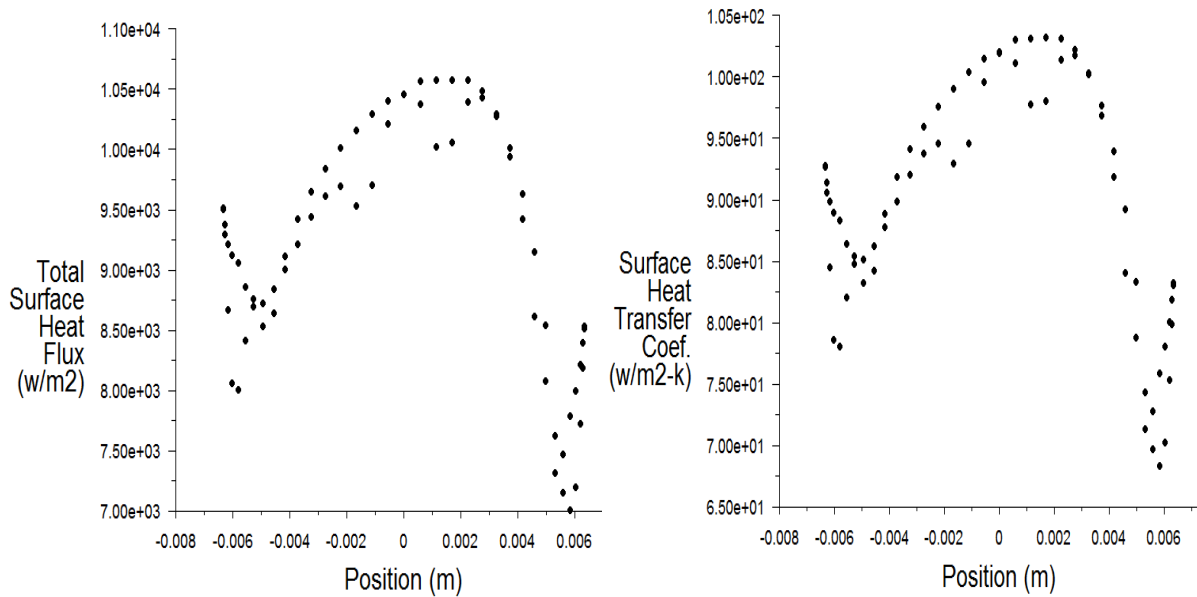
Měrné teplo

obr. 7.7 Definování referenčních hodnot pro výpočet parametrů přestupu tepla

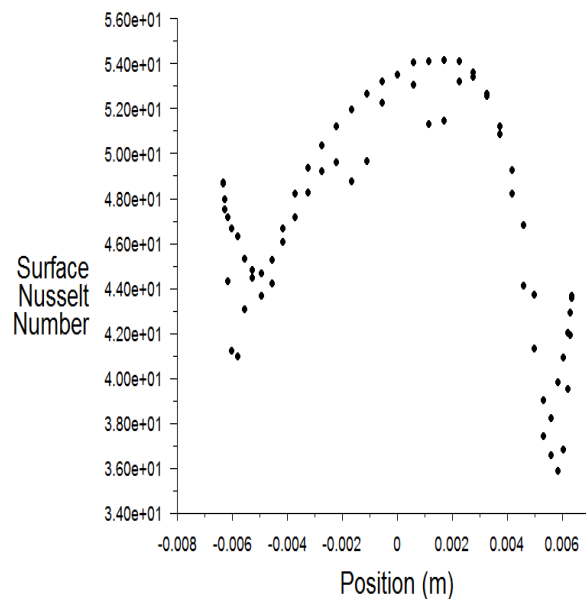


obr. 7.8 Rozložení statického tlaku [Pa]

Při těchto parametrech je možno vyhodnotit Nusseltovo číslo a součinitel přestupu tepla na stěně trubky, případně určit jejich střední hodnotu.



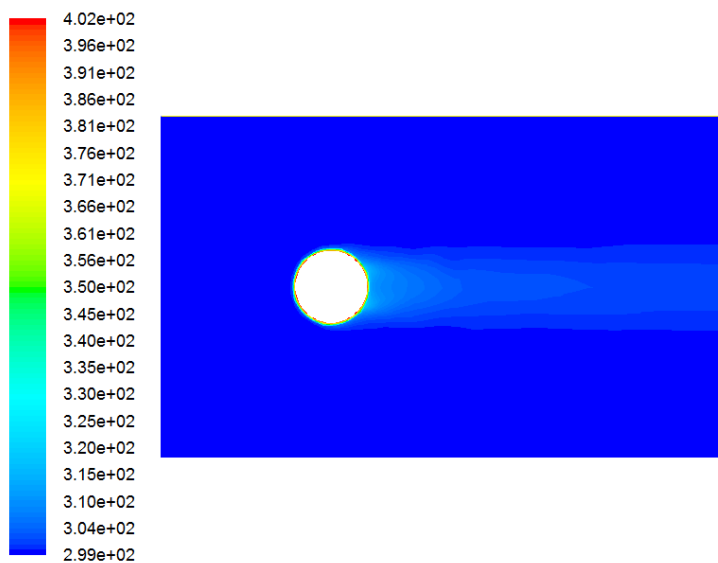
obr. 7.9 Hodnoty tepelného toku a součinitele přestupu tepla po obvodu stěny trubky, jehož průměrná hodnota je $\alpha=99.33$



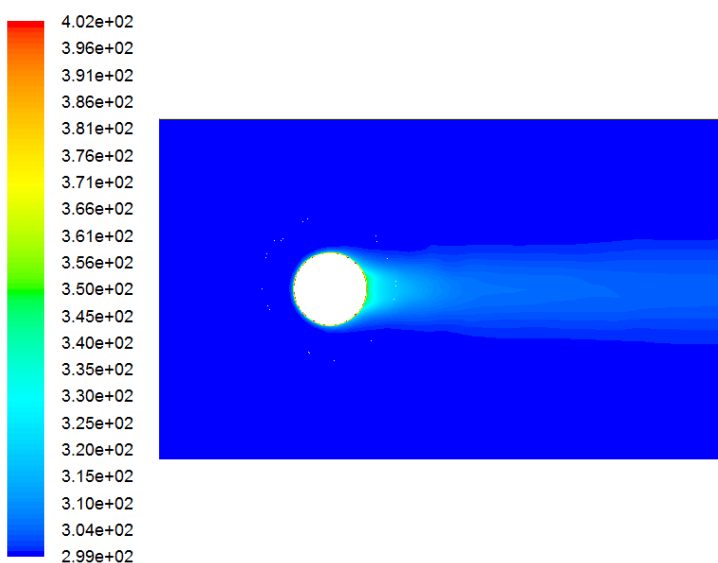
obr. 7.10 Hodnoty Nusseltova čísla po obvodu stěny trubky, průměrná hodnota je $Nu=44.37$

Celý numerický výpočet byl řešen nejdříve RNG $k-\varepsilon$ modelem a zopakován na podstatně jemnější síti v okolí trubky. Zjemnění sítě je možno provést i ve Fluentu příkazem ADAPT. Byla pak lépe zachycena mezní vrstva pro rychlostní a teplotní profil a docházelo k významnějšímu přestupu tepla mezi stěnou a kapalinou. Proto vycházely odlišné hodnoty proti hrubé síti, kde teplo ze stěny se téměř nešířilo do okolí. Na obr. 7.11 a obr. 7.12 je možno porovnat odlišnosti v šíření teploty v oblasti za trubkou. Třetí varianta byla řešena na

hrubé síti $k-\omega$ turbulentním modelem.

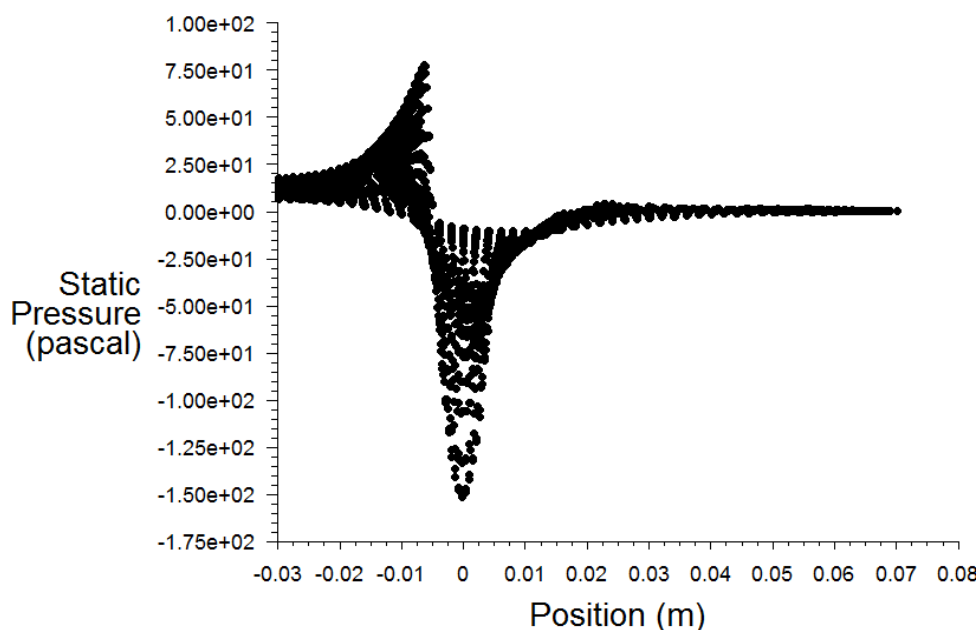


obr. 7.11 Rozložení statické teploty na hrubé síti



obr. 7.12 Rozložení statické teploty na jemné síti

Dalším významným parametrem je tlaková ztráta ve směru proudění užitím PLOT X-Y grafu.



obr. 7.13 Rozložení statického tlaku ve směru proudění

Tlakový spád z numerického výpočtu se určí jako rozdíl průměrného tlaku na vstupu do oblasti a na výstupu z oblasti. Z obr. 7.13 je vidět, že v oblasti kolem trubky dochází k významným změnám tlaku, ale tlaková ztráta je dána dle výše uvedené definice. Je zřejmé, že v případě blízkého umístění trubek za sebou bude třeba tlakové změny namodelovat.

$$\Delta p = p_{\text{vstup}} - p_{\text{výstup}} = 11.7 - 0 = 11.7 \text{ Pa}$$

Srovnání mezi odhadem a numerickým řešením získaným výpočtem na hrubé a jemné síti lze vyhodnotit následující tabulky.

Tab. 7.8

	odhad	hrubá sít' $k-\varepsilon$	jemná sít' $k-\varepsilon$	hrubá sít' $k-\omega$
součinitel přestupu tepla [$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$]	80.47	89.48	142.26	121.1
Nusseltovo číslo [1]	38.86	46.96	74.66	63.30
tepelný výkon [W]	30.84	34.4	54.7	46.11
tlaková ztráta [Pa]		11.4	7.7	12.8

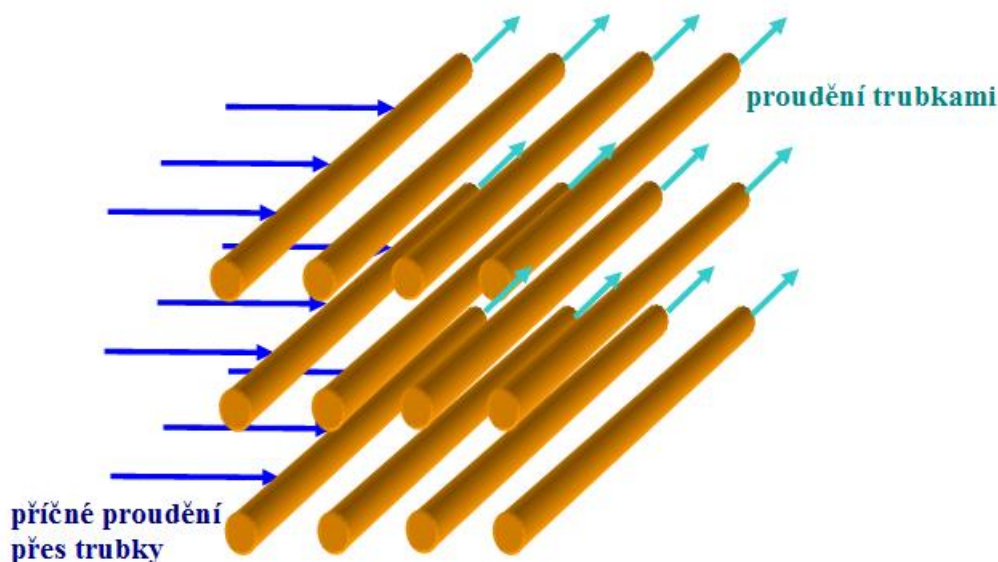
7.6. Obtékání trubky s přestupem tepla (s prouděním uvnitř)

Při zjednodušujícím předpokladu, že kapalina trubkou dle předchozí úlohy neproudí a předpokládá se pouze, že stěna trubky je ohřátá na danou teplotu, je zbytečné se zabývat

prostorovým modelováním, neboť v každém řezu kolmém k ose trubky je rozložení proudového a teplotního pole stejné. Při proudění kapaliny trubkou ale dochází v případě dlouhých trubek ke změně teploty podél a v tom případě se proudové a především teplotní pole v řezech kolmých na osu trubky mění. Proto byla řešena úloha s proudící kapalinou uvnitř trubky jako 3D prostorová úloha. Je možno konstatovat, že pro trubku délky řádově 1 metr se změna teploty po délce neprojeví, nebude tedy výsledek zobrazen. Při trubkách delších uspořádaných do spirály apod. má 3D výpočet smysl.

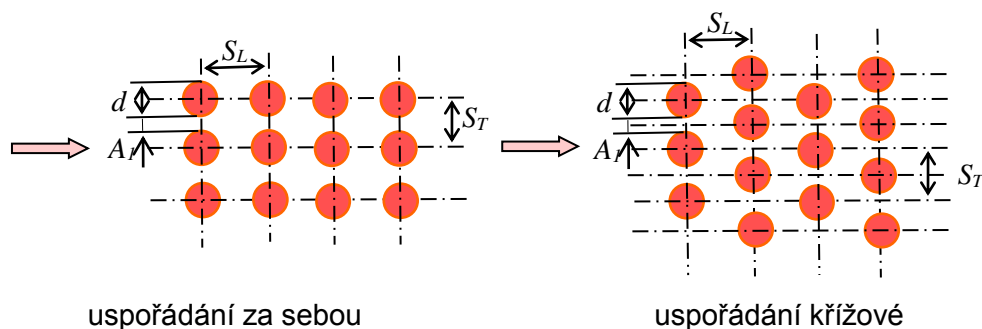
7.7. Proudění napříč svazkem trubek s přestupem tepla

Přenos tepla při příčném proudění svazkem trubek má řadu průmyslových aplikací, jako je generace páry v boileru nebo vzduchové chlazení v klimatizačních jednotkách. Geometrické uspořádání je na obr. 7.14.



obr. 7.14 Schématické zobrazení uspořádání systému trubek v příčném proudu.

Uspořádání může být v zásadě dvojího druhu, uspořádání za sebou a křížové [2] , [3] . Při pohledu ve 2D je uspořádání následovné:



obr. 7.15 Schématické zobrazení uspořádání systému trubek v příčném proudu.

Koeficient přestupu tepla je v tomto případě spojen s umístěním dané trubky v systému. Koeficient pro první trubky je přibližně roven koeficientu definovanému pro jednu trubku v příčném proudu, přitom koeficienty trubek uvnitř systému se mění, přitom záleží na typu uspořádání. Ve většině konfigurací se ale podmínky přestupu tepla stabilizují a malé změny se objevují v koeficientu přestupu tepla pro trubky za čtvrtou až pátou řadou. Při větším počtu řad (N_L je větší než 10) je možné definovat průměrný koeficient:

laminární, přechodové a turbulentní obtékání svazku trubek, N_L je počet trubek	$Nu_D = C_1 Re_{D,\max}^m$ pro $N_L > 10$, $2000 \leq Re_{D,\max} \leq 40000$ $Pr = 0.7$, konstanty C_1 a m jsou dány v tabulce S_L – vodorovná rozteč trubek, S_T – svislá rozteč trubek
---	---

Konstanty pro určení Nusseltova čísla při obtékání svazku trubek

systém přímý	$S_T/D = 1.25$		$S_T/D = 1.50$		$S_T/D = 2.00$		$S_T/D = 3.00$	
	C_1	m	C_1	m	C_1	m	C_1	m
S_L/D								
1.25	0.348	0.592	0.275	0.608	0.100	0.704	0.063	0.752
1.50	0.367	0.586	0.250	0.620	0.101	0.702	0.068	0.744
2.00	0.418	0.570	0.299	0.602	0.229	0.632	0.198	0.648
3.00	0.290	0.601	0.357	0.584	0.374	0.581	0.286	0.608

systém kříž	$S_T/D = 1.25$		$S_T/D = 1.50$		$S_T/D = 2.00$		$S_T/D = 3.00$	
	C_1	m	C_1	m	C_1	m	C_1	m
S_L/D								
1.000			0.497	0.558				
1.125					0.478	0.565	0.518	0.560
1.250	0.518	0.556	0.505	0.554	0.519	0.556	0.522	0.562
1.500	0.451	0.568	0.460	0.562	0.452	0.568	0.488	0.568
2.000	0.404	0.572	0.416	0.568	0.482	0.556	0.449	0.570
3.000	0.310	0.592	0.356	0.580	0.448	0.562	0.482	0.574

(7.7.1)

Při proudění systémem trubek dochází k významné změně teploty. Protože se tekutina pohybuje skrz systém trubek, teplota stěny se snižuje a tím také teplotní rozdíl. Tepelný výkon by byl silně nadhodnocen při použití rozdílu teplot $\Delta T = T_s - T_{ref}$. Proto se používá tzv. logaritmičká teplotní diference

$$\Delta T_{lm} = \frac{(T_s - T_I) - (T_s - T_O)}{\ln\left(\frac{(T_s - T_I)}{(T_s - T_O)}\right)} \quad (7.7.2)$$

kde T_I, T_O jsou vstupní a výstupní teplota proudícího média. Výstupní teplota, která je potřebná k určení ΔT_{lm} může být odhadnuta z

$$\frac{T_s - T_O}{T_s - T_I} = \exp\left(-\frac{\pi d N \bar{\alpha}}{\rho v N_T S_T c_p}\right) \Rightarrow T_O = -\left(\exp\left(-\frac{\pi d N \bar{\alpha}}{\rho v N_T S_T c_p}\right) \cdot (T_s - T_I) - T_s\right)$$

kde N je celkový počet trubek v systému a N_T je počet trubek svíslé rovině. Tedy ΔT_{lm} je známo a tepelný výkon na jednotku délky trubky může být spočítán ze vztahu

$$P = N(\pi d \bar{\alpha} \Delta T_{lm}) \quad (7.7.3)$$

Důležitým parametrem je tlaková ztráta, která je definována z Bernoulliho rovnice a jak je známo, závisí na ztrátovém součiniteli příslušném systému trubek a určovaném empiricky.

$$\Delta p = N_L \zeta \left(\frac{\rho u_{\max}^2}{2}\right) \text{ resp. } \Delta p = N_L \zeta \left(\frac{8 Q_m^2}{\rho \pi^2 d^4}\right) \quad (7.7.4)$$

Ztrátový součinitel je specifický pro různé uspořádání trubek. Při uspořádání trubek za sebou je definován následovně:

$$\zeta = \gamma \left(N_L \frac{S_L}{S_T} A + B \right) \quad (7.7.5)$$

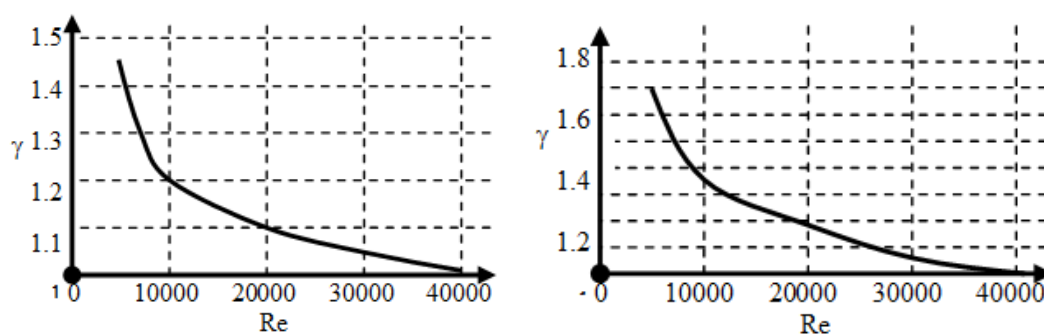
$$\text{kde } A = 0.028 \left(\frac{S_T}{2a}\right)^2 \quad a = \frac{S_T - d}{2} \quad B = \left(\frac{S_T}{2a} - 1\right)^2$$

Při uspořádání trubek křížem je definován podobně:

$$\zeta = \gamma \left(0.7 + 0.8 \left(N_L \frac{S_L}{S_T} A + B \right) \right) \quad (7.7.6)$$

$$\text{kde } A = 0.028 \left(\frac{S_T}{2a}\right)^2 \quad a = \frac{S_T - d}{2} \quad B = \left(\frac{S_T}{2a} - 1\right)^2$$

Součinitel γ závisí na Reynoldsově čísle. Pro hodnoty vyšší než 40000 je roven jedné a pro hodnoty nižší je odhadnut z empirických měření a je zobrazen v obr. 7.16.



uspořádání za sebou

uspořádání křížem

obr. 7.16 Hodnoty součinitele γ v závislosti na Re čísle [3]

Jak je vidět, že řešení obtékání takového systému trubek je závislé na řadě empiricky určených koeficientů, jejichž specifikace není cílem tohoto předmětu. Ve Fluentu se totiž získá tlakový spád přímo. Tím je také možno zpětně ztrátový součinitel určit, může být tedy výsledkem výpočtu. Další kapitola nastíní možnost řešení obtékání systému trubek s přestupem tepla pro jednoduchost ve 2D numerickou cestou.

7.7.1. Uspořádání svazku trubek za sebou - numerická simulace

Dle výše uvedeného schématu byl řešen svazek trubek o počtu $N = N_L N_T = 7 * 8 = 56$ a byla vytvořena geometrie a síť. Geometrické parametry oblasti jsou následující:

Tab. 7.9

Trubka					
průměr	$d=$	0.0164	m	délka	$l=$ 1 m
plocha stěny trubky	$S=$	0.0515	m ²		
vodorovná rozteč	$S_L=$	0.0343	m	svislá rozteč	$S_T=$ 0.0313 m
	$S_L/d=$	2.0915		$S_T/d=$	1.9085
	$S_T/S_L=$	0.9125			
počet trubek vodorovně	$N_L=$	7		počet trubek svisle	$N_T=$ 8
počet trubek v systému	$N=$	56			
teplota stěny	$T_s=$	70	°C	teplota stěny	$T_s=$ 343.15 K

Systém trubek byl ofukován vzduchem v oblasti, definované jako okolí, přitom byly zadány fyzikální vlastnosti vzduchu a přitékané množství. Data jsou pro porovnání definována shodně s příkladem publikovaným v lit.[2].

Tab. 7.10

Okolí			
šířka	$D=$	0.2555 m	délka $L=$ 0.2422 m

Tab. 7.11

Vlastnosti vzduchu					
hustota	$\rho=$	1.2295 kg·m ⁻³	teplota	$T_{ref}=$	15 °C
viskozita	$\nu=$	1.48E-05 m ² ·s ⁻¹	viskozita dyn.	$\eta=$	1.82E-05 Pa·s
tepelná vodivost	$\lambda=$	0.0253 W·m ⁻¹ ·K ⁻¹	teplotní vodivost	$a=$	2.04E-05 m ² ·s ⁻¹
měrné teplo	$c_p=$	1007 J·kg ⁻¹ ·K ⁻¹			
rychlost	$u=$	6 m·s ⁻¹	rychlost max.	$u_{max}=$	7.7 m·s ⁻¹
hmot. průtok	$Q_m=$	0.176 kg·s ⁻¹			

V tabulce jsou odhadnuty dle [2] parametry, které budou v dalším výpočtu potřebné, jako je maximální rychlost. Hmotnostní průtok je ve 2D úloze definován pro hloubku oblasti (délku trubek) rovnu 1 m. Fyzikální vlastnosti jsou definovány nezávislé na teplotě, ale při výpočtu jsou využity vztahy závislosti těchto veličin na teplotě, které nabízí Fluent (polynomické závislosti resp. využití kinetické teorie).

Ze zadaných parametrů lze spočítat výše uvedené parametry proudění a přestupu tepla (Reynoldsovo číslo je počítáno z maximální rychlosti). Odhad Nusseltova čísla je problematický a je opravdu jen orientační. Na tento odhad navazuje výpočet součinitele

prostupu tepla stěnou určeného z Nusseltova čísla vztahem $\tilde{\alpha} \approx \frac{Nu\lambda}{d}$.

Tab. 7.12

Reynoldsovo číslo max.	$Re=$	8521	turbulentní proudění
Prandtlovo číslo	$Pr=$	0.7253	
opravný koeficient	$C_f=$	0.229	
exponent	$m=$	0.632	
Nusseltovo číslo	$Nu=$	69.81	
součinitel přestupu tepla	$\tilde{\alpha} =$	107.69 W·m ⁻² ·K ⁻¹	

Dále bude proveden výpočet tepelného výkonu, kde je využit odhad střední logaritmické teploty. Výsledky jsou v následující tabulce.

Tab. 7.13

Výpočet tepelného výkonu			
rozdíl teplot na vstupu	$T_s - T_I =$	55.00	K
odhad rozdílu teplot na výstupu	$T_s - T_O =$	48.28	K
střední log. teplota	$\Delta T_{lm} =$	51.57	K
tepelný výkon	$P =$	16023.83	W

Výpočet tlakového spádu využívá opět empirických vztahů, viz Tab. 7.14.

Tab. 7.14

Výpočet tlakové ztráty			
součinitel	$A =$	0.1236	
součinitel	$B =$	1.2115	
ztrátový součinitel	$\zeta =$	2.1593	
opravný koeficient	$g =$	1.4000	
tlaková ztráta	$\Delta p =$	334.51	Pa

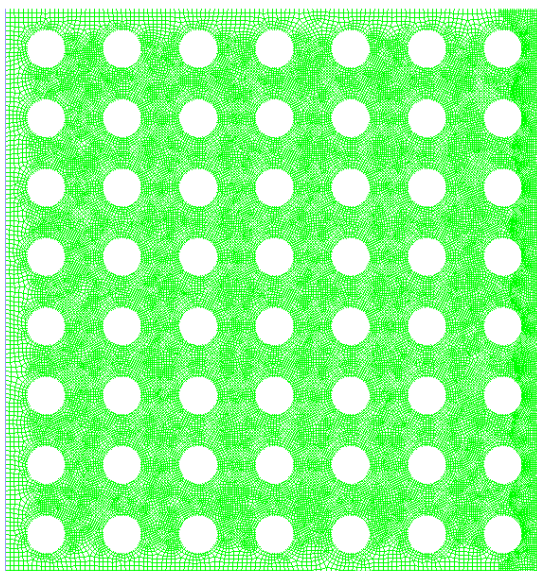
Tyto výpočty budou opět porovnány s numerickým modelem. Dá se očekávat, že úloha je z hlediska geometrie komplikovanější a proto budou i výsledky numerického řešení odlišné.

Matematický model

V této úloze dochází k turbulentnímu proudění dle předchozích výpočtů Reynoldsova čísla, je tedy opět použit matematický model RNG $k-\varepsilon$. Hodnota Reynoldsova čísla není vysoká, tedy se jedná o turbulenci, ale bude testován i model $k-\omega$.

Vytvoření geometrie a sítě

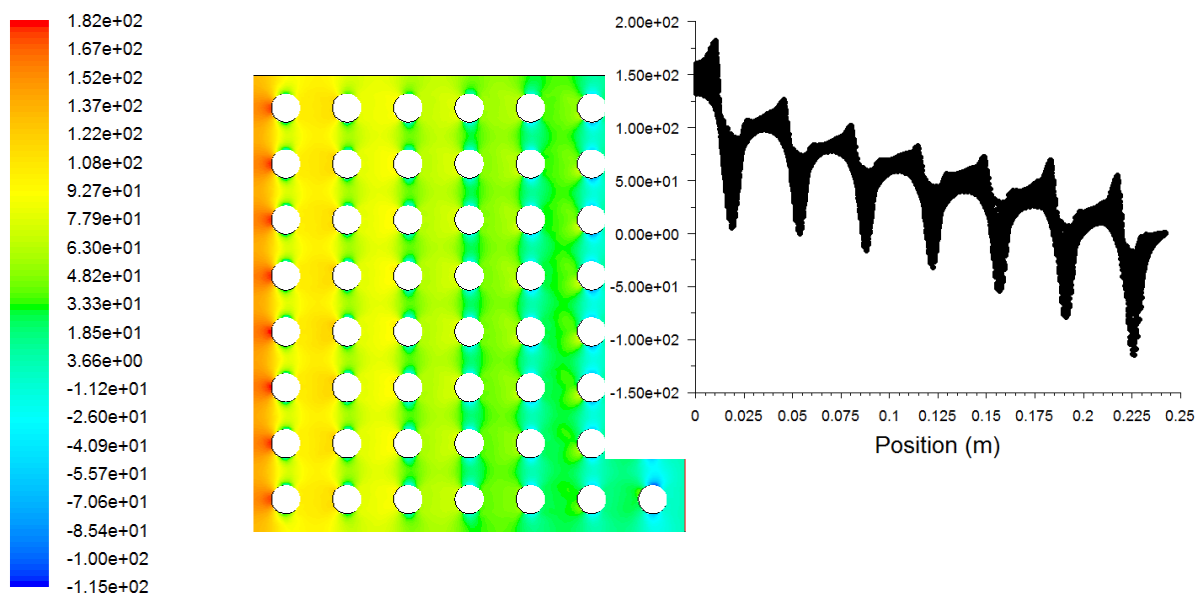
Dle výše uvedených rozměrů byla vytvořena síť, viz obr. 7.17.



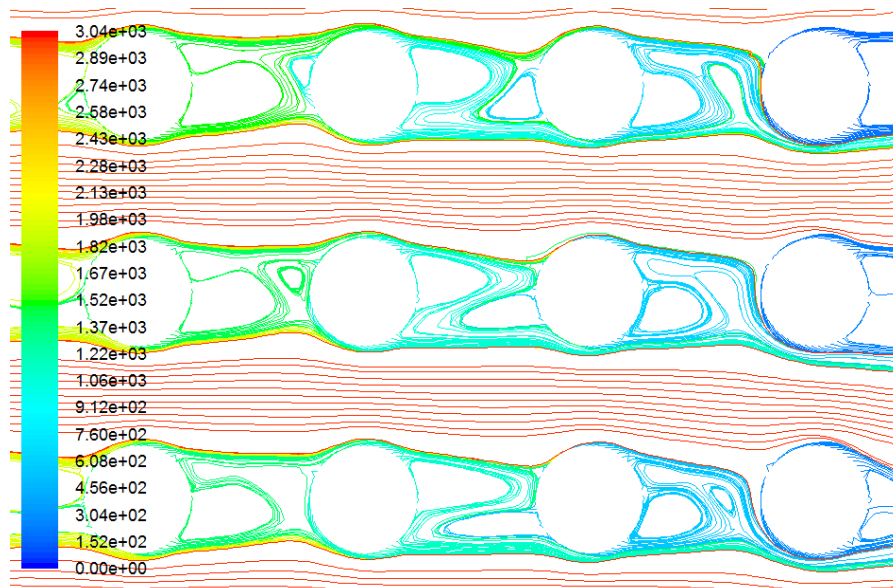
obr. 7.17 Zobrazení geometrie a sítě

Výsledky řešení

Na obr. 7.18 je vidět pokles statického tlaku ve směru proudění a navíc nepravidelné rozložení v těsné blízkosti trubek z důvodu změny rychlosti, zavíření a případného odtržení proudu za trubkami, což je patrné z dalšího detailního pohledu na proudovou funkci v obr. 7.19.

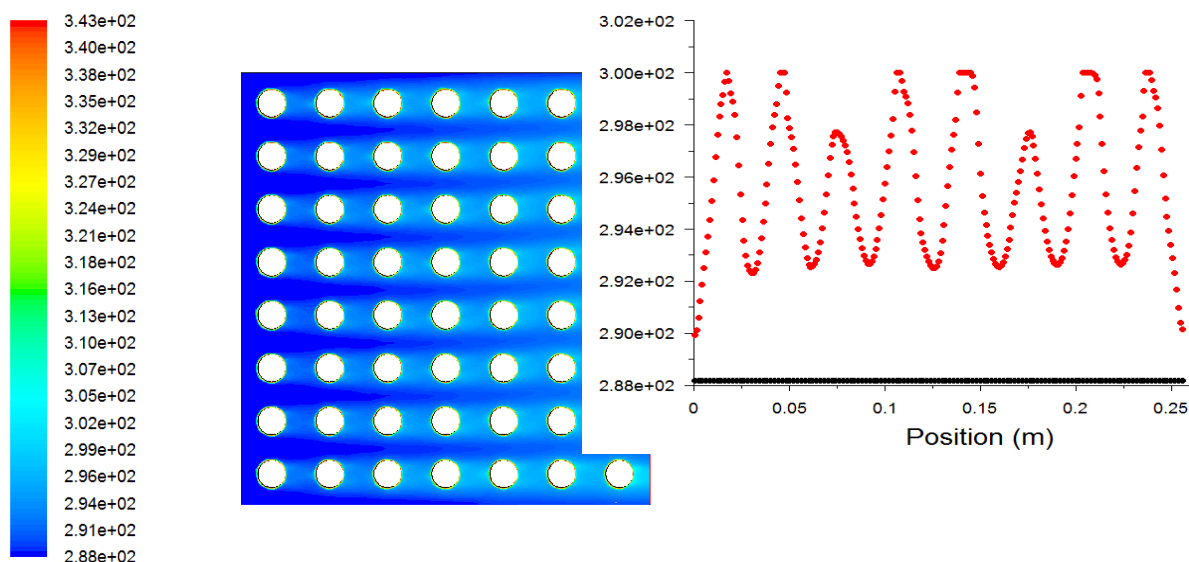


obr. 7.18 Rozložení statického tlaku v oblasti s detailem rozložení tlaku uvnitř oblasti vs. délka oblasti v grafu



obr. 7.19 Detail odtržení proudové funkce za trubkami

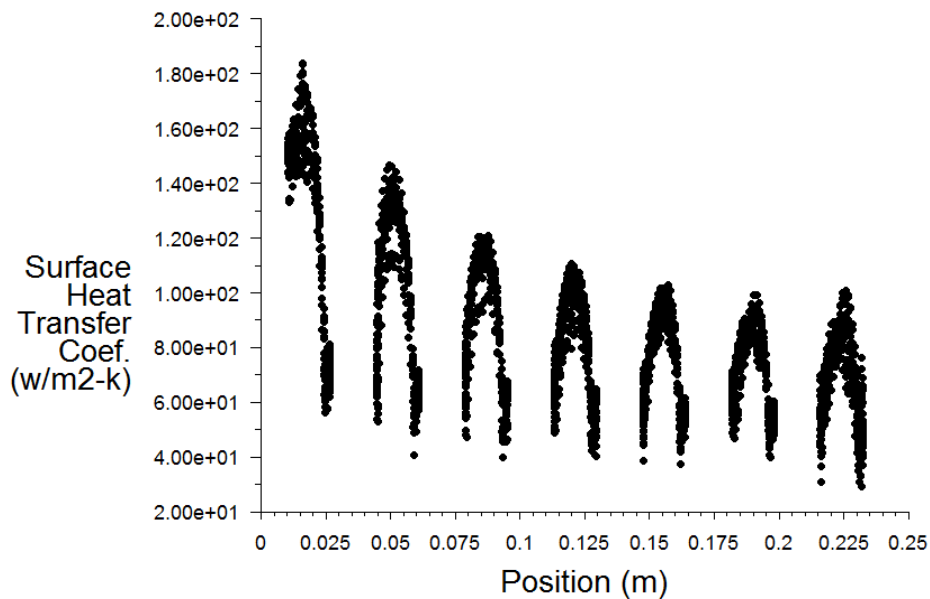
Zajímavé je rozložení teploty. Vzhledem ke konstantní hodnotě teploty na stěně trubky je teplota na výstupu určitě nadhodnocena, neboť trubka by z důvodu obtékání chladnějším vzduchem měla být ochlazována. Také teplota v trubkách je předpokládána konstantní.



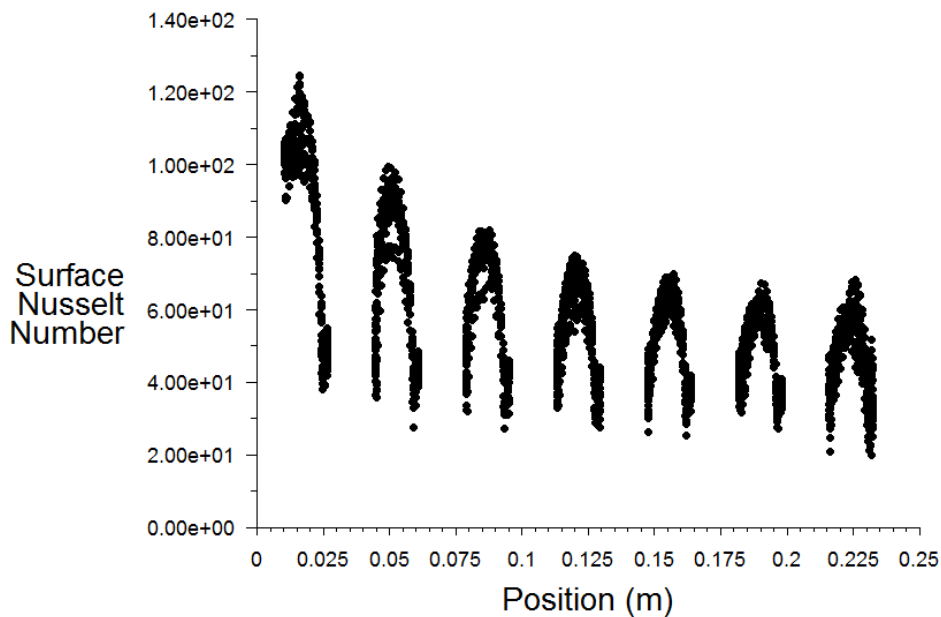
obr. 7.20 Statická teplota v oblasti a v grafu na vstupu (konstanta) a na výstupu (periodičnost je dána obtékáním řady trubek)

Velmi vypovídající grafické závislosti jsou získány pomocí PLOT X-Y. Na obr. 7.21 a obr. 7.22 jsou vyhodnoceny průběhy součinitele přestupu tepla a Nusseltova čísla. Velmi zajímavé je sledovat periodičnost těchto hodnot, z nichž je nutné určit střední hodnoty pro

porovnání s empirickými odhady. Je také vidět, že průběh těchto funkcí se příliš nemění zhruba od čtvrté až páté řady trubek.



obr. 7.21 Součinitel přestupu tepla na stěnách potrubí



obr. 7.22 Nusseltovo číslo vyhodnocené na stěnách potrubí

Výsledky z teoreticko - empirického odhadu významných veličin při obtékání systému trubek s přestupem tepla jsou v následující tabulce porovnány se středními hodnotami získanými z numerického výpočtu. Odlišnosti jsou výrazné a jsou způsobené obtékáním prvních tří až pěti trubek a tím, že celkový počet řad je u reálných výměníků podstatně větší. Střední

logaritmická teplota se v numerickém výpočtu nevyskytuje, protože není potřebná k určení ostatních veličin.

Tab. 7.15

	odhad	<i>k-ω</i> model adapt
součinitel přestupu tepla [$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$]	107.69	85.42
Nusseltovo číslo [1]	69.81	57.89
střední logaritmická teplota	51.57	
tepelný výkon [W]	16023	13591
tlaková ztráta [Pa]	334.51	179.67

7.7.2. Uspořádání svazku trubek křížem - numerická simulace

Druhá běžně používaná varianta uspořádání trubek ve výměníku je varianta uspořádání svazku trubek křížem.

Geometrické parametry oblasti jsou velmi podobné, rozměry trubek a rozteče se shodují, trubky v každé druhé řadě jsou posunuté ve svislém směru. Také rychlosti, vstupní teplota a teplota trubek je shodná s předchozím příkladem. Proto budou uváděny pouze odlišné parametry.

System trubek byl ofukován vzduchem v oblasti, definované jako okolí, kde došlo vzhledem k posunu trubek ke změně celkových rozměrů oblasti.

Tab. 7.16

Okolí					
šířka	$D=$	0.27125	m	délka	$L=$ 0.2422 m

Tab. 7.17

Vlastnosti vzduchu					
hustota	$\rho=$	1.225	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	teplota	$T_{ref}=$ 15 °C
viskozita	$\nu=$	1.48E-05	$\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$	viskozita dyn.	$\eta=$ 1.82E-05 Pa·s
tepelná vodivost	$\lambda=$	0.0253	$\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$	tepl. vodivost	$a=$ 2.04E-05 $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$
měrné teplo	$c_p=$	1007	$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$		
rychlost	$u=$	6	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	rychlost max.	$U_{max}=$ 7.38 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
hmot. průtok	$Q_m=$	0.176	$\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$		

Ze zadaných parametrů lze spočítat dále uvedené parametry proudění a přestupu tepla (Reynoldsovo číslo je počítáno z odhadu maximální rychlosti):

Tab. 7.18

Reynoldsovo číslo max.	Re=	8167	turbulentní proudění
Prandtlovo číslo	Pr=	0.7253	
opravný koeficient	C_1 =	0.48	
exponent	m =	0.56	
Nusseltovo číslo	Nu=	72.13	
součinitel přestupu tepla	$\tilde{\alpha}$ =	111.28	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$

Odhad Nusseltova a dalších parametrů proudění je proveden stejně jako v předchozím případě a je orientační.

Tab. 7.19**Výpočet tepelného výkonu**

rozdíl teplot na vstupu	$T_s - T_I$ =	55	K
odhad rozdílu teplot na výstupu	$T_s - T_O$ =	48.32	K
střední log. teplota	ΔT_{lm} =	51.59	
tepelný výkon	P =	15289.96	W

Výpočet tlakového spádu využívá opět empirických vztahů.

Tab. 7.20**Výpočet tlakové ztráty**

součinitel	A =	0.1236	
součinitel	B =	1.2115	
ztrátový součinitel	ζ =	2.4274	
tlaková ztráta	Δp =	376.0533	Pa

Tyto výpočty budou opět porovnány s numerickým modelem.

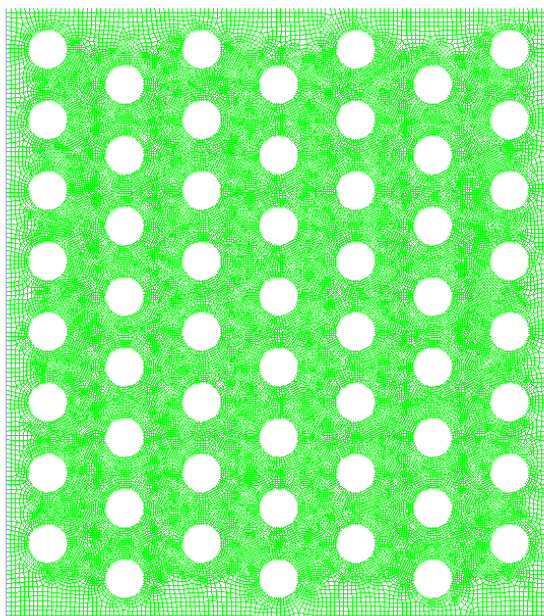
Matematický model

V této úloze dochází k turbulentnímu proudění, i když Reynoldsovo číslo je poměrně nízké. Tedy výsledky jak numerického modelu, tak odhadů budou zatíženy větší chybou, neboť se pohybujeme v přechodové oblasti mezi laminárním a turbulentním modelem, kde

definovat matematických model je velmi obtížné. Je tedy opět použit matematický model $k-\omega$, který je vhodný pro úlohy s přestupem tepla i pro nižší Reynoldsova čísla.

Vytvoření geometrie a sítě

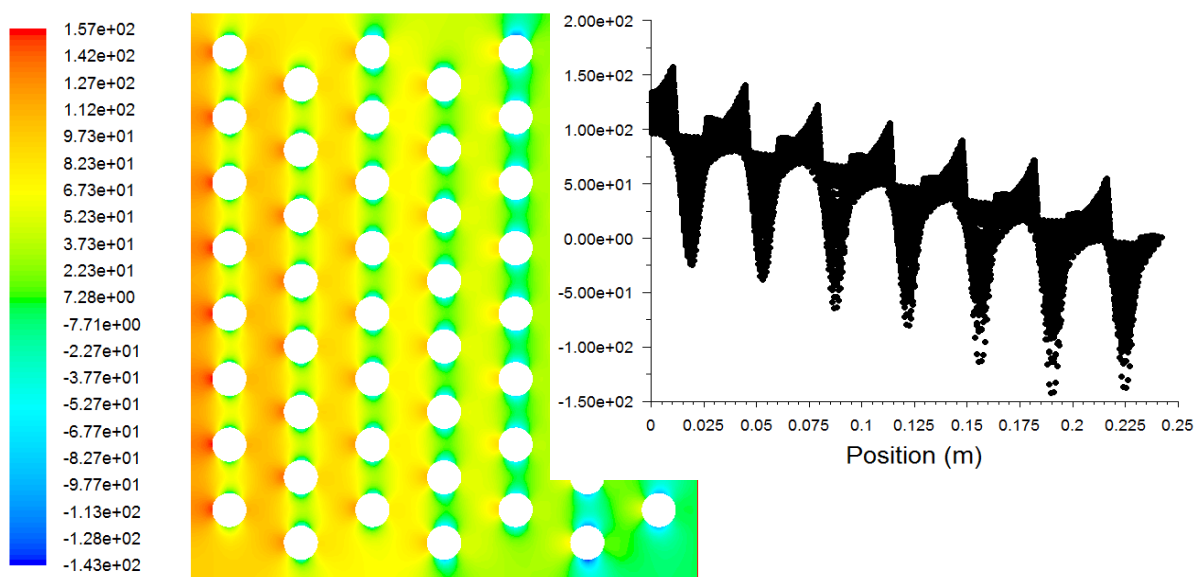
Dle výše uvedených rozměrů byla vytvořena síť, viz obr. 7.23



obr. 7.23 Zobrazení geometrie a sítě

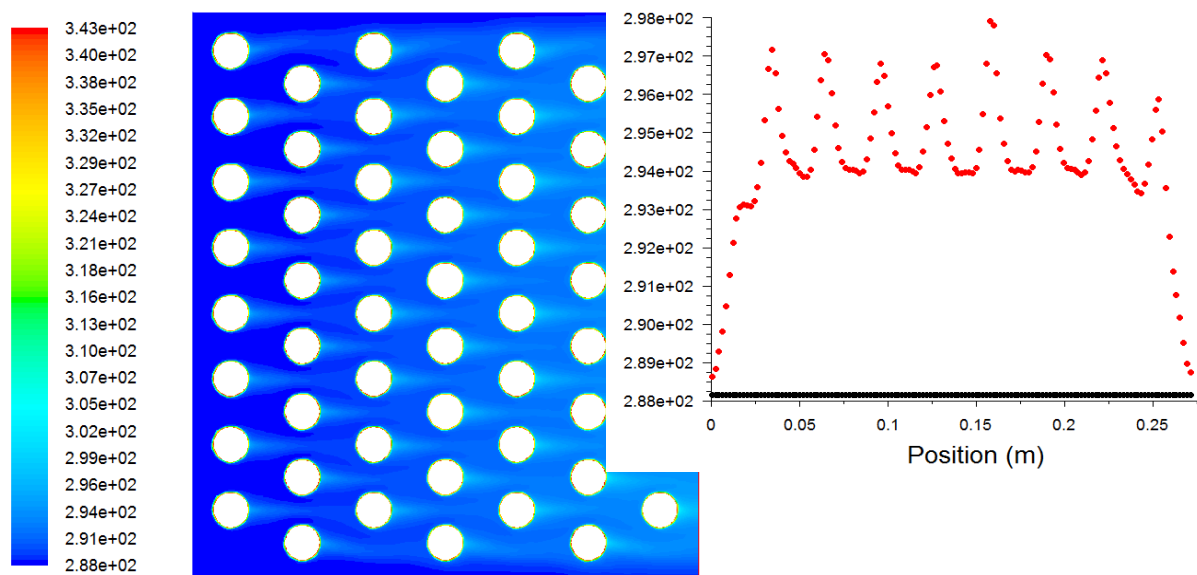
Výsledky řešení

Na obr. 7.18 je vidět pokles statického tlaku ve směru proudění a navíc nepravidelné rozložení v těsné blízkosti trubek z důvodu zavíření případného odtržení proudu za trubkami.



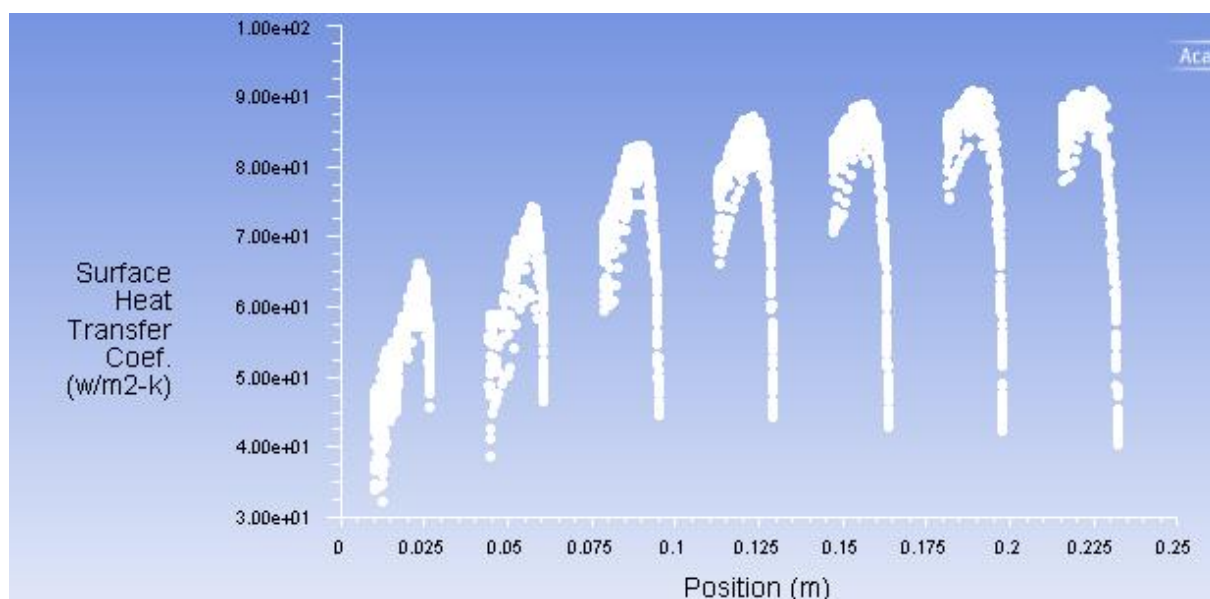
obr. 7.24 Rozložení statického tlaku v oblasti s detailem v grafu

Zajímavé je rozložení teploty na vstupu do oblasti (konstanta) a výstupu z oblasti (periodicita teploty), viz obr. 7.25.

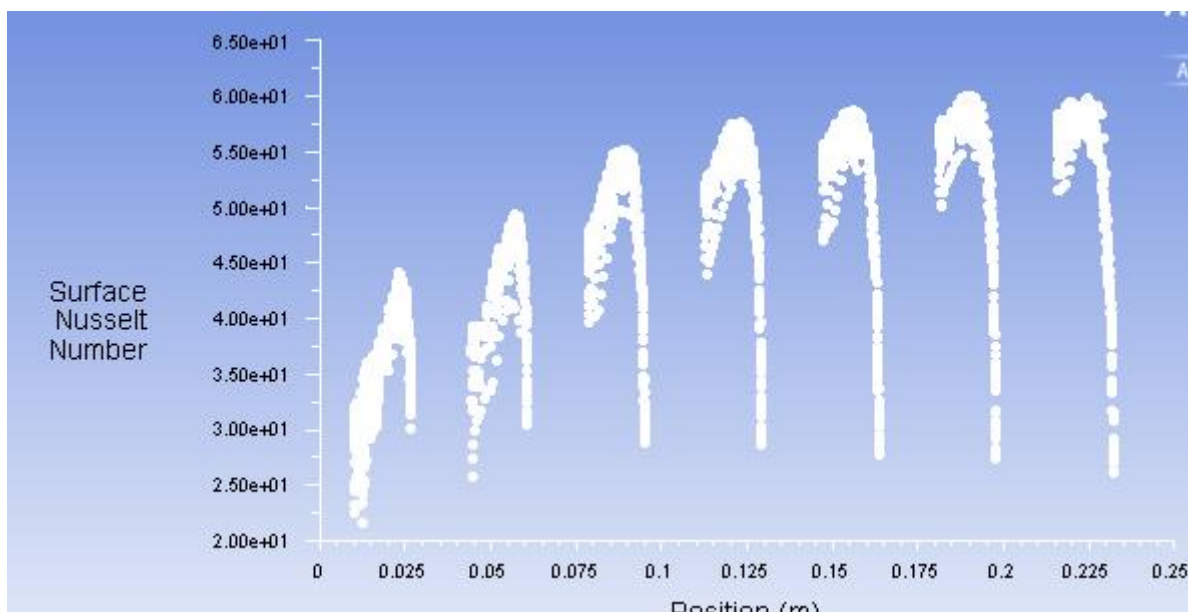


obr. 7.25 Statická teplota v oblasti a v grafu na vstupu (konstanta) a na výstupu

Velmi vypovídající jsou opět závislosti vyhodnocené na obr. 7.26 a obr. 7.27, tj. průběhy součinitele přestupu tepla a Nusseltova čísla. Velmi zajímavé je sledovat periodičnost těchto hodnot, z nichž je nutné určit střední hodnoty pro porovnání s empirickými odhady. Je také vidět že průběh těchto funkcí se příliš nemění zhruba od čtvrté až páté řady trubek.



obr. 7.26 Součinitel přestupu tepla po obvodu stěn potrubí



obr. 7.27 Nusseltovo číslo vyhodnocené na stěnách potrubí

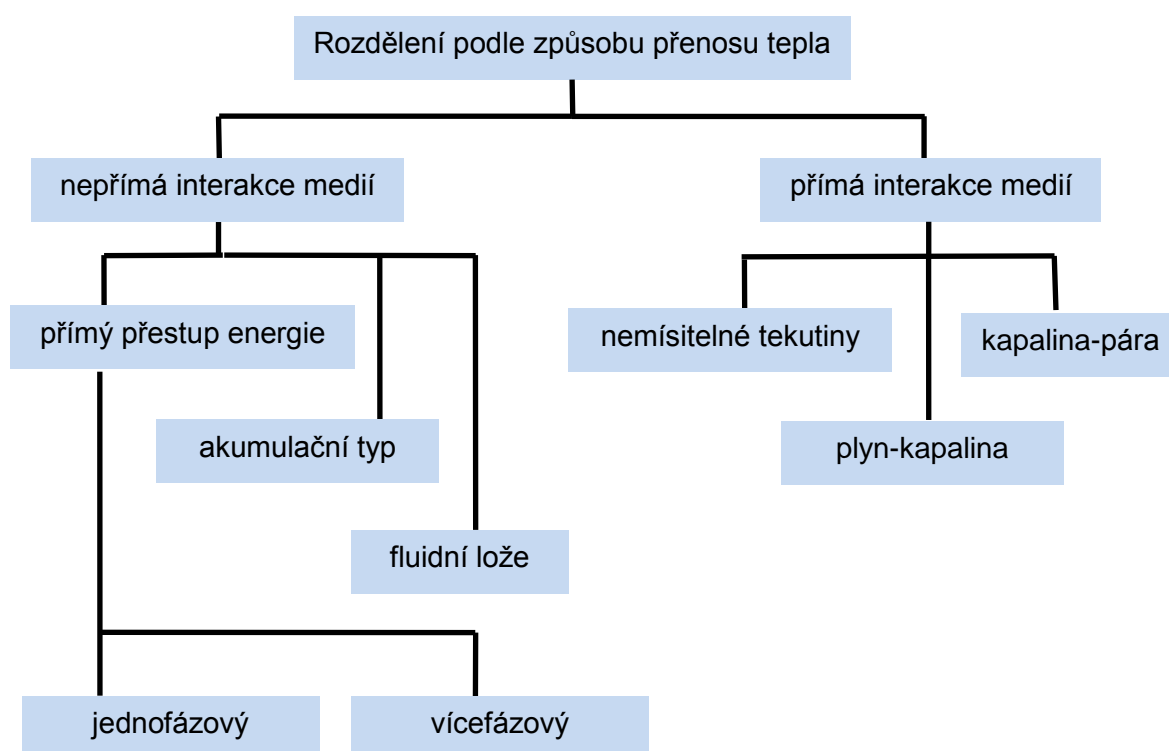
Výsledky z teoreticko-empirického odhadu významných veličin při obtékání systému trubek s přestupem tepla jsou v následující tabulce porovnány se středními hodnotami získanými z numerického výpočtu. Odlišnosti jsou výrazné a jsou způsobené obtékáním prvních tří až pěti trubek. Střední logaritmická teplota se v numerickém výpočtu nevyskytuje.

Tab. 7.21

	odhad	výpočet
odhad součinitel přestupu tepla [W·m⁻²·K⁻¹]	111.28	87.65
Nusseltovo číslo [1]	72.13	50.8
střední logaritmická teplota	51.32	
tepelný výkon [W]	15289.96	11302.23
tlaková ztráta [Pa]	376.06	118.91

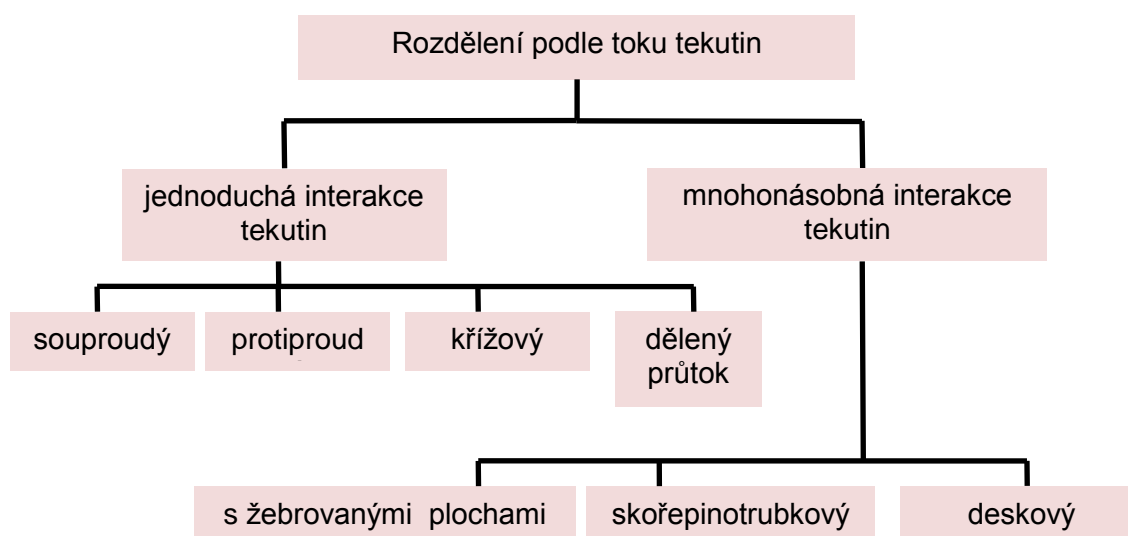
8. Analýza výměníků tepla

Výměníky tepla jsou zařízení, která zajišťují přenos vnitřní tepelné energie (entalpie) mezi dvěma a více tekutinami, mezi pevným povrchem a tekutinou, nebo mezi částicemi a tekutinou, při jejich vzájemné interakci bez dodané externí práce a tepla. Tekutiny mohou být obecně jednosložkové, nebo může jít o směs, a to jak jednofázovou, tak binární. Typickou aplikací jsou dvoumediové ohřívače a chladiče tekutin, kde jsou obě tekutiny odděleny pevnou stěnou, a výparníky v tepelných a jaderných elektrárnách. Tepelné výměníky mohou být děleny podle konstrukce, počtu tekutin, principů práce a mnoha dalších rozdílných kritérií.

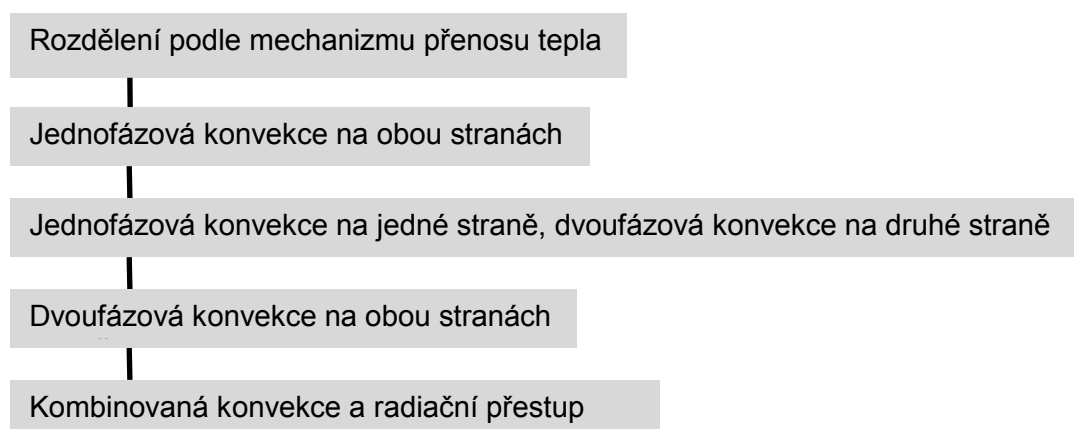


Obr. 8.1 Rozdělení výměníků podle procesu přestupu tepla

Podle počtu proudících tekutin existují dvou-, tří- až N-tekutinové výměníky. Kompaktní výměníky mají hustotu teplosměnné plochy větší než $700 \text{ m}^2 \cdot \text{m}^{-3}$ a nekompaktní menší než $700 \text{ m}^2 \cdot \text{m}^{-3}$. Podle konstrukce existují trubkové, deskové, s rozšířenou plochou žebrováním atd. a regenerační.



Obr. 8.2 Rozdělení výměníků podle toku médií

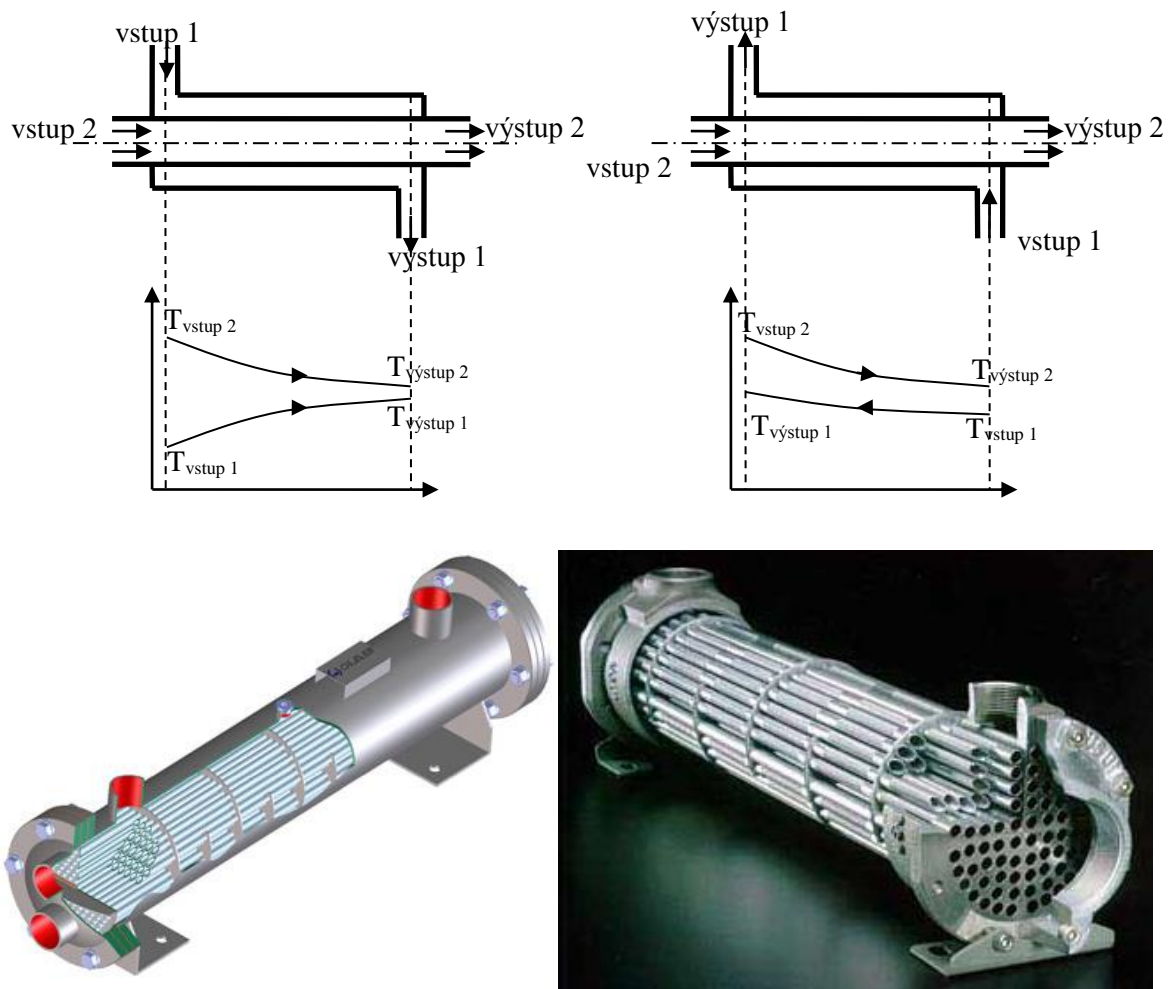


Obr. 8.3 Rozdělení výměníků podle mechanismu přenosu tepla

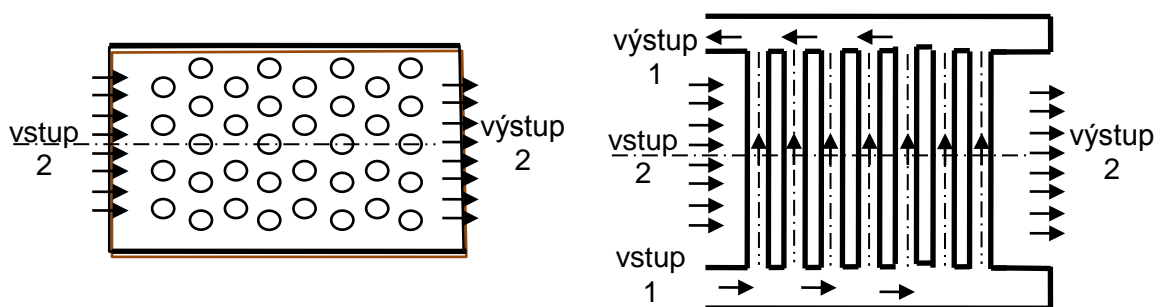
8.1. Základní typy výměníků a jejich popis

8.1.1. Výměník typu tekutina-tekutina - trubkový

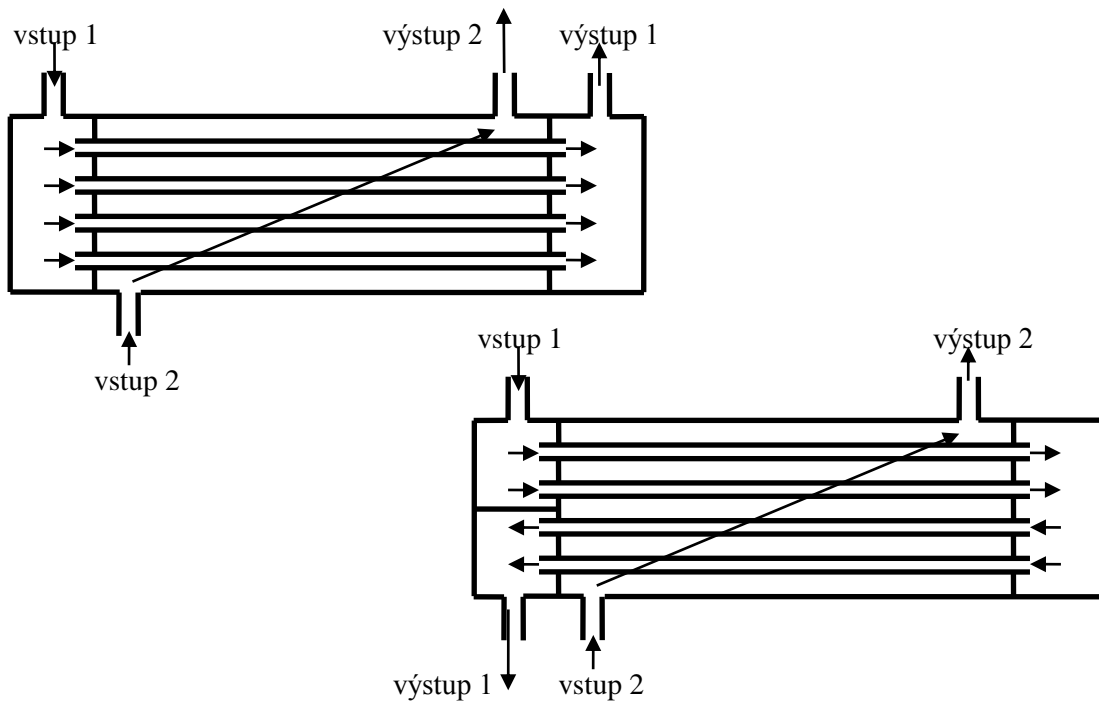
Výměníky typu tekutina-tekutina jsou nejčastěji se vyskytující výměníky. Jde zejména výměníky o trubkové, tubusové, spirální atd., přičemž se jedná nejčastěji o soustavu kapalina-plyn, případně jedna z tekutin může měnit fázi (var, vypařování, kondenzace). Výměníky mohou být soproudé, protiproudé a křížové. Příkladem jsou výměníky v kotlích, přehříváky, výparníky, ekonomizéry, soproudé a protiproudé vodní chladiče stacionární hydrauliky apod. Jejich konstrukční provedení je velice rozmanité a závislé na druhu a účelu instalace výměníku.



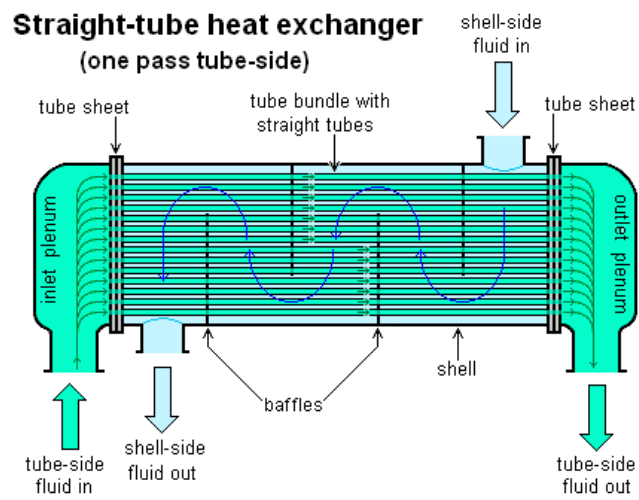
Obr. 8.4 Schéma tubusového souprůdného a protiprůdného výměníku s průběhem teploty po délce výměníku a jeho realizace [3] , [20] , [21]

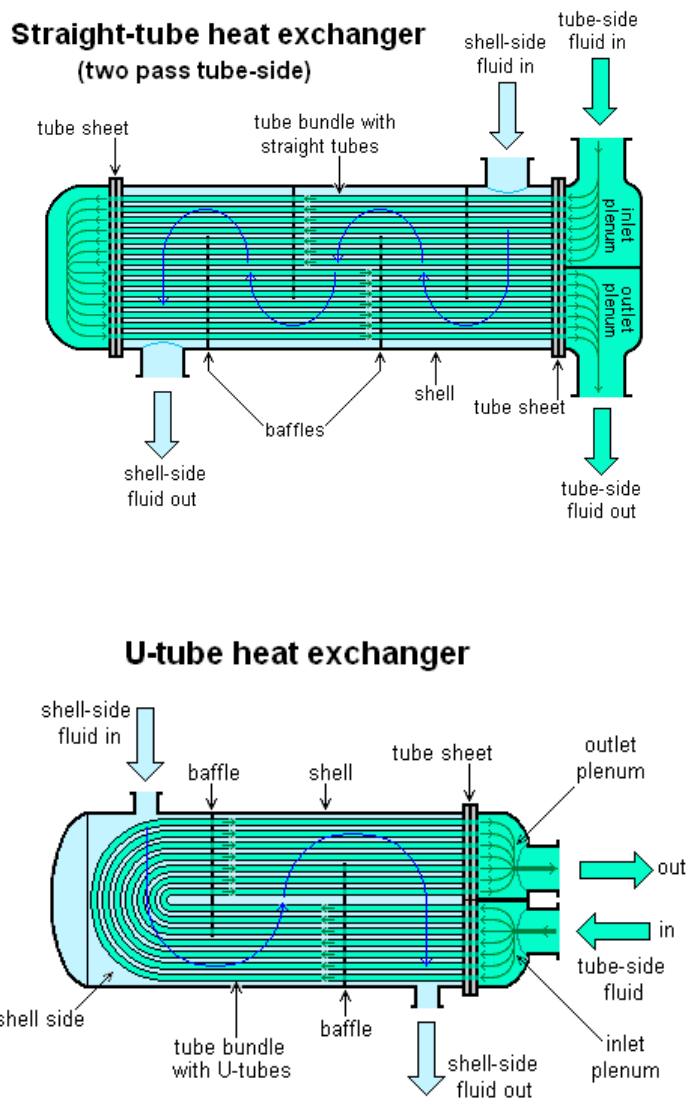


Obr. 8.5 Schéma křížového výměníku a trubkového výměníku [3]



Obr. 8.6 Schéma skořepinotrubkového výměníku [3]

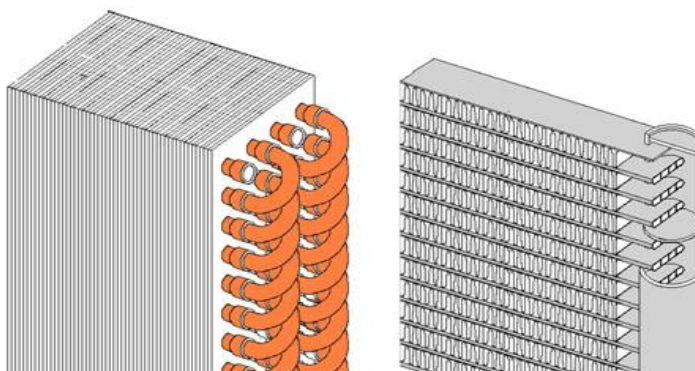




Obr. 8.7 Schéma skořepinotrubkového výměníku s různým umístěním vstupů a výstupů a přepážkami [22]

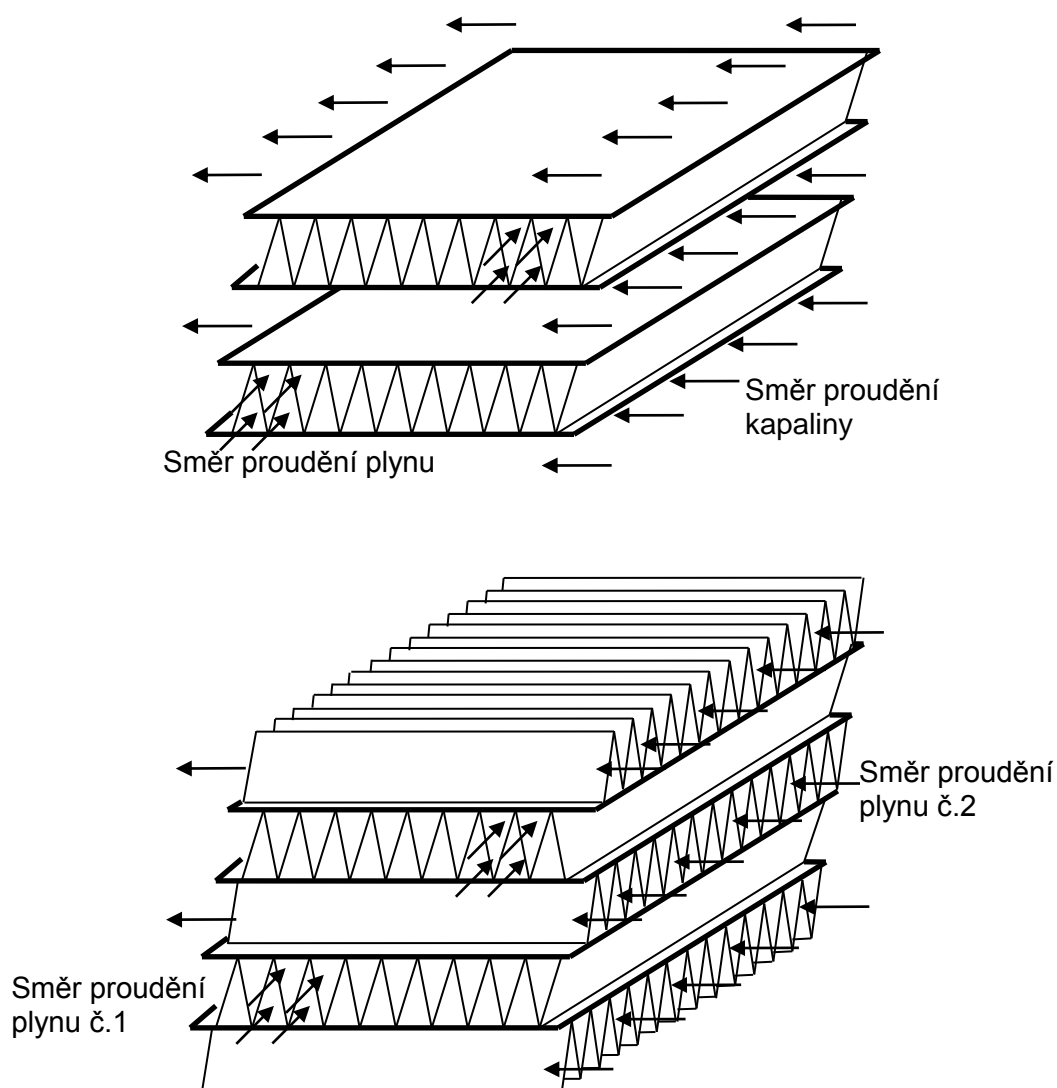
8.1.2. Voštinové výměníky

Tento typ výměníků sestává s plochých desek, které jsou osazeny žebry z tenkého plechu. U výměníku typu plyn-kapalina je vždy žebrovaná teplosměnná plocha ze strany plynu. Pokud se jedná o výměník plyn-plyn mohou být žebrované obě strany výměníku.

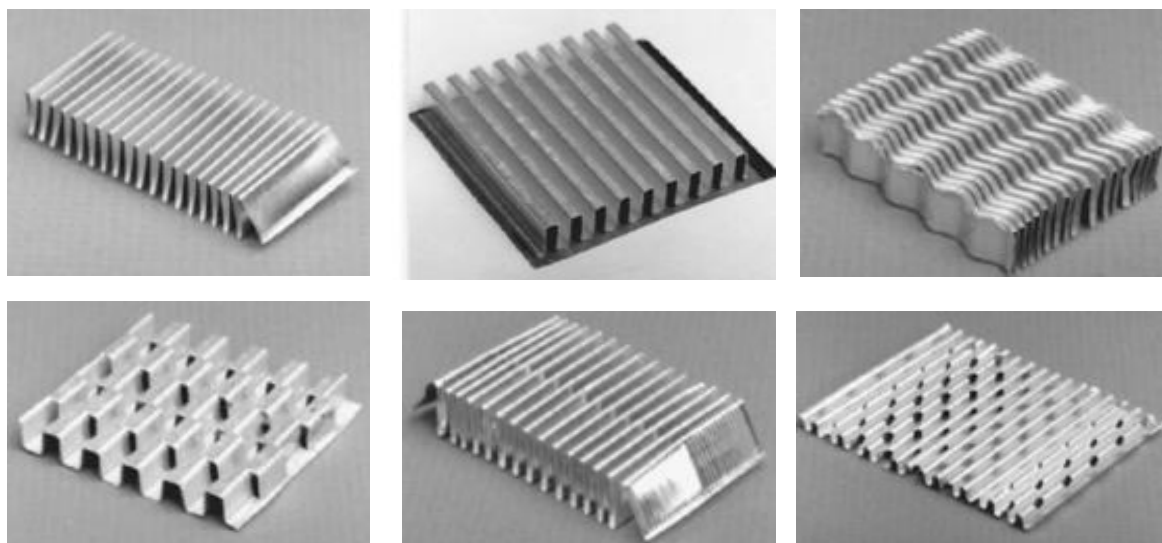


obr. 8.8 Schéma voštinového výměníku [23] .

U kapaliny nemůže být použito žebrování z důvodu velkého tlakového namáhání tenkých žebér a možnosti zhroucení žebrované struktury. Žebra jsou většinou z materiálu s vysokou tepelnou vodivostí, např. hliník či měď, a jsou vyrobena z tenkostěnného plechu procesem ohýbání či stříhání viz obr. 8.10. Průměrný počet žebér je pak 120-700 žebér na 1 metr délky. U výměníků s vysokým výkonem pak může tato hodnota dosáhnout až 2100 žebér na 1 m délky. Tím je zajištěna vysoká teplosměnná plocha, která může být až $1300\text{m}^2\cdot\text{m}^{-3}$. Na následujícím obrázku je zobrazena typická konfigurace výměníku pro typ voda-plyn a plyn-plyn. Konstrukční uspořádání může být velice rozmanité a opět závisí na typu aplikace, pro kterou je výměník použit.



obr. 8.9 Typická konfigurace voštinového výměníku plyn-plyn a kapalina-plyn [3] .



obr. 8.10 Příklady voštin [3] .

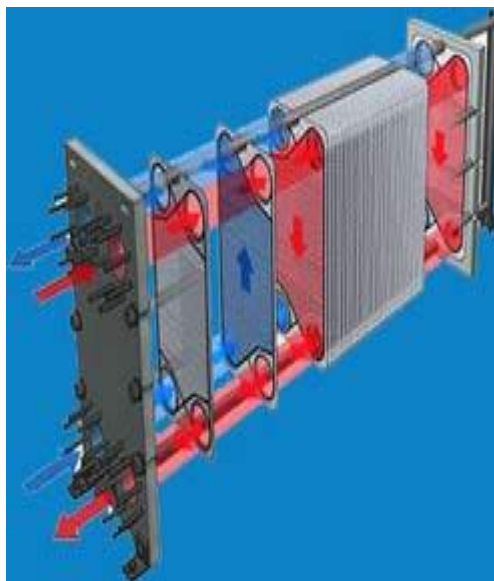
Voštinové výměníky se využívají zejména v oblasti chlazení kapalin a plynů prostřednictvím proudícího vzduchu. Jedná se tak např. o vodní chladič spalovacího motoru, různé chladiče klimatizačních jednotek, chladič hydraulického obvodu u mobilní hydrauliky apod. Chladič je většinou osazen vrtulovým ventilátorem, který zajišťuje dostatečný průtok vzduchu. U automobilů je průtok vzduchu zajištěn pohybem vozidla (tzv. náporové chlazení) a ventilátor je v činnosti pouze v případě, kdy se vozidlo delší dobu nepohybuje a motor případně klimatizační jednotka stále běží.

8.1.3. Deskové výměníky

Deskové výměníky jsou sestaveny z tenkých desek (plechů), které oddělují média. Tento typ výměníků má poměrně velkou teplosměnnou plochu, ale naopak není určen pro velké tlaky a teploty, stejně jako teplotní a tlakovou diferencí. Deskové výměníky jsou konstrukčně velice jednoduché a variabilní, na základovou osu se umísťují vždy dva zrcadlové plechy, které oddělují tekutiny. Podle požadovaného výkonu se pak na základový nosník umístí dostatečný počet plechů a celý výměník se ukončí víkem. Každá deska je osazena těsněním z elastomeru, které zajišťuje oddělení médií. Těsnění se na jednotlivých deskách střídá, takže zajišťuje periodické střídání médií mezi deskami.

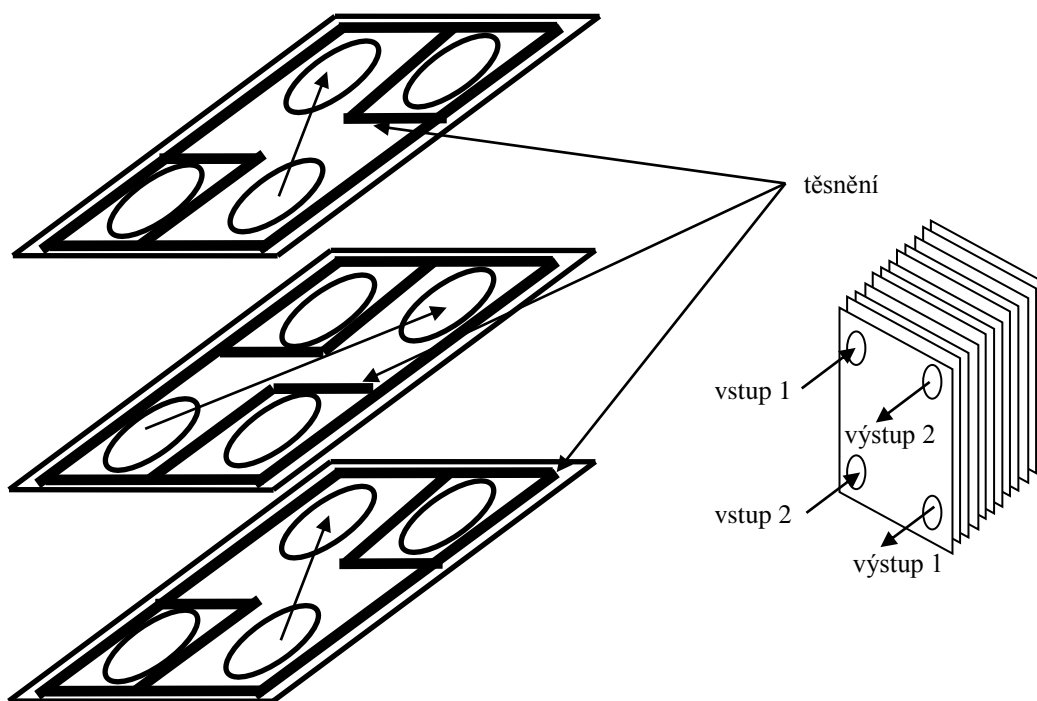
Tento typ výměníku je převážně kompaktní s poměrně velkou teplosměnnou plochou (žebrování) a využívá se v případech, kdy je nutné dodržet následující kritéria

- obě tekutiny musí být čisté a nesmí působit korozivně, protože výměník má malý hydraulický průměr z důvodu malých průtočných kanálů
- výměníky se vyznačují relativně velkou tlakovou ztrátou, která je úměrná výkonu výměníku
- tlak a teplota médií jsou limitovány konstrukcí, tloušťkou desek a odolností těsnění
- tento typ výměníků je kompaktní a má velkou teplosměnnou plochu, která je až $6000 \text{ m}^2 \cdot \text{m}^{-3}$.



obr. 8.11 Příklad deskového výměníku[19]

Deskové výměníky se využívají všude tam, kde je nutný velký výkon, při relativně malých zástavbových rozměrech. Nelze je však využít v těžkých aplikacích, z důvodu jejich citlivosti na znečištění a následného zvýšení tlakového spádu.

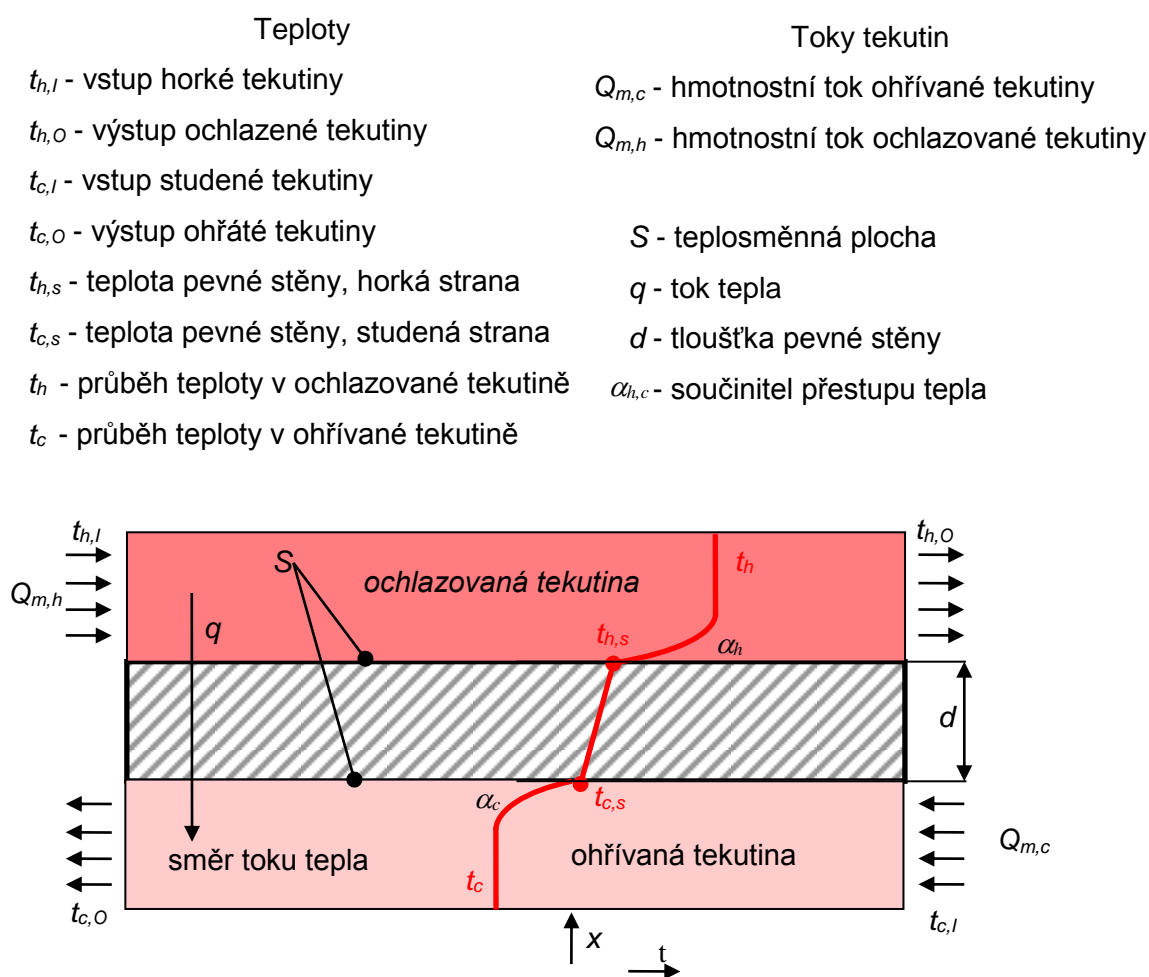


Obr. 8.12 Schéma deskového výměníku [3] .

8.2. Tepelný výkon a tlaková ztráta výměníku

8.2.1. Tepelný výkon

Tepelný výkon a tlaková ztráta jsou dva základní konstrukční parametry výměníků. Pro jednoduchost se budou základní výpočtové vztahy definovat na jednoduchém výměníku, ve kterém budou odděleny dvě tekutiny pevnou stěnou o dané tloušťce, viz obr. 8.13, [3].



obr. 8.13 Schéma toků tekutin a tepla protiproudým výměníkem [3].

Energetická analýza vychází z **kalorimetrické rovnice**, která popisuje výměnu tepla dvou nehybných těles. Záměnou hmotnosti těles u kalorimetrické rovnice za hmotnostní tok tekutin získáme rovnici pro výkon tepelného výměníku. Index c značí chladnější tekutinu (cool), h značí teplejší tekutinu (heat), I značí vstup tekutiny (Input), O značí výstup tekutiny (Output). Jelikož platí zákon zachování energie, je u dokonale izolované soustavy tepelný výkon u ochlazované a ohřívající tekutiny identický. U ohřívající tekutiny (indexace c) je výkon P_c kladný, protože výstupní teplota tekutiny je vyšší než vstupní $t_{c,O} > t_{c,I}$. Jinými slovy

ohřívána tekutina teplo přijímá, proto je výkon kladný. U ochlazované tekutiny (indexace h) je naopak výstupní teplota média nižší než vstupní $t_{h,O} < t_{h,I}$, výkon P_h je tak záporný, protože tekutina teplo odevzdává. V absolutní hodnotě jsou však tyto výkony identické.

$$\begin{aligned} P_c &= Q_{m,c} c_{p,c} (t_{c,O} - t_{c,I}) \quad [\text{W}] \\ P_h &= Q_{m,h} c_{p,h} (t_{h,O} - t_{h,I}) \\ P &= P_c = -P_h \end{aligned} \quad (8.2.1)$$

kde $c_{p,c}$ [$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$] je měrná tepelná kapacita chladící tekutiny (ohřívané) a $c_{p,h}$ [$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$] je měrná tepelná kapacita chlazené tekutiny (ochlazované). Obě tepelné kapacity jsou definovány při konstantním tlaku.

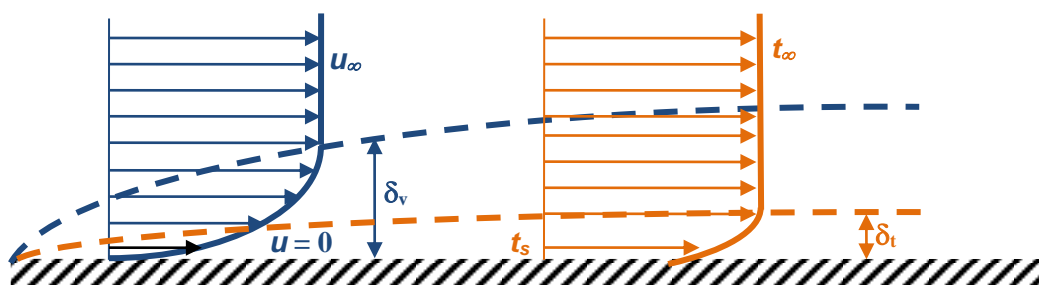
Teplo prochází také pevnou stěnou výměníku z horké tekutiny do chladné. Vedení tepla pevnou stěnou je popsáno následující rovnicí

$$P = \lambda \frac{t_{h,s} - t_{c,s}}{d} S \quad (8.2.2)$$

Tato rovnice řeší pouze vedení v pevné stěně. V blízkosti stěny se však nachází rychlostní, tak i teplotní mezní vrstva. Teplotní mezní vrstva souvisí s koeficientem přestupu tepla, který definuje, jak intenzivně přechází teplo z tekutiny do pevné stěny nebo naopak. Rovnice pro přestup tepla pro teplou a studenou stěnu je dáno následujícími rovnicemi

$$\begin{aligned} P &= \alpha_c (t_{c,s} - t_c) S \\ P &= \alpha_h (t_{h,s} - t_h) S \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

Koeficient přestupu tepla souvisí s velikostí teplotní mezní vrstvy. Teplotní mezní vrstva je tenká vrstva tekutiny v blízkosti pevné stěny, ve které se teplota mění od teploty pevné stěny do teploty velmi blízké teplotě neovlivněného proudu. Rychlostní mezní vrstva je definovaná obdobně, jedná se o tenkou vrstvu v blízkosti stěny, kde rychlost narůstá z nulové hodnoty na stěně do hodnoty velmi blízké neovlivněnému proudu. Důležité je si uvědomit, že tloušťka teplotní mezní vrstvy δ_t a tloušťka rychlostní mezní vrstvy δ_v není identická, a jejich tloušťka je řízena rozdílnými fyzikálními procesy.



obr. 8.14 Znáornění rychlostní a teplotní mezní vrstvy

Zavedením koeficientu přestupu tepla do rovnice (8.2.2) získáme rovnici pro prostup tepla.

$$P = \frac{t_h - t_c}{\frac{1}{\alpha_h} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_c}} S \quad (8.2.4)$$

Tím je odstraněna teplota pevné stěny, která nás při výpočtu nezajímá, protože jde o vnitřní část výměníku a z hlediska výpočtu nás zajímá pouze teplota tekutin na vstupu a výstupu z výměníku. Dále se zavede veličina, která se bude nazývat koeficient prostupu tepla

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_h} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_c}} \quad (8.2.5)$$

Po zavedení prostupu tepla pak rovnice pro výkon přejde do tvaru

$$P = k(t_h - t_c)S \quad (8.2.6)$$

Analýzou předchozího vztahu lze tedy stanovit parametry, které ovlivňují výkon výměníku. Pokud je záměrem maximalizovat výkon, pak je nutné vycházet z následujících podmínek

1. tloušťka stěny by měla být co nejmenší (to je důvod tenkých stěn ve výměnících)
2. tepelná vodivost pevné stěny by měla být co největší (to je důvod proč se využívají materiály s vysokou tepelnou vodivostí, hliník, měď atd.)
3. Teplosměnná plocha by měla být co největší (to je důvod proč je ve výměnících velký počet žeber, voštin, malých trubek pod.)
4. Koeficient přestupu tepla by měl být co největší, jeho hodnota se dá částečně ovlivnit rychlostí tekutiny, s rostoucí rychlostí však narůstají s druhou mocninou tlakové ztráty.

8.2.2. Tlaková ztráta

Zdroj tlakové a pohybové energie, který zajišťuje proudění média skrz výměník je čerpadlo, ventilátor nebo dmychadlo. Tlaková ztráta výměníku je silně závislá na fyzikálních vlastnostech tekutiny (hustota, viskozita apod.). Výkon, který je nutné dodat tekutině, aby proudila výměníkem v daném množství, je možné určit pomocí tlakové ztráty z následujícího vztahu, viz [3] , [11] :

$$P = \frac{Q_m \Delta p}{\rho}$$

$$P \approx \frac{1}{2} \frac{\eta}{\rho^2} \frac{4l}{d_h} f(\text{Re}) \quad \text{pro laminární proudění} \quad (8.2.7)$$

$$P \approx \frac{0.046}{2} \frac{\eta^{0.2}}{\rho^2} \frac{4l}{d_h} \frac{Q_m^{2.8}}{S_0^{1.8} d_h^{0.2}} \quad \text{pro turbulentní proudění}$$

l je délka, na které dochází k přestupu tepla, d_h je hydraulický průměr a S_0 je minimální průtočná plocha výměníku.

Obecně je tlaková ztráta výměníku závislá na následujících parametrech:

1. třecí ztráty, které souvisejí s třecími (viskózními) silami proudění tekutiny okolo teplosměnných ploch
2. momentový efekt, který souvisí se změnou hustoty při proudění ve výměníku
3. komprese a expanze tekutiny při obtékání těles (teplosměnných ploch)
4. geometrické parametry výměníku (u velkých vertikálních výměníku je nutné zahrnout také statický tlak vyvozený gravitací, pro plyny se tato ztráta zanedbává.

Stanovení tlakové ztráty je však velice složité a v odborné literatuře se vyskytuje celá řada empirických a polo-empirických vztahů pro jednotlivé typy výměníku. Tlaková ztráta je při analytickém výpočtu složena ze třecích a místních ztrát [3]

$$\Delta p = \left(\lambda \frac{l}{d_h} + \zeta \right) \frac{8}{\pi^2 \rho d_h^4} Q_m^2 \quad (8.2.8)$$

kde λ je koeficient třecí ztráty, ζ je koeficient místní ztráty určený empiricky pro hydraulický systém, l je délka na které dochází k přestupu tepla.

Tlakové ztráty je nutné u výměníku řešit vždy u obou stran výměníku, tj. pro obě tekutiny. U celé řady výměníků jde u řešení tlakového spádu v podstatě o řešení tlakové ztráty při obtékání tělesa, nebo o tlakovou ztrátu při proudění v uzavřeném kanále (trubka, tenká mezera apod.). Nejjednodušší případ nastává u trubkových výměníků, kde jedna

tekutina proudí ve svazku trubek a druhá obtéká svazek trubek. Při obtékání svazku trubek je možné tlakovou ztrátu určit na základě rovnice zahrnující všechny ztráty do koeficientu místní ztráty [3].

$$\Delta p = \zeta \frac{8}{\pi^2 \rho d_h^4} Q_m^2 \quad (8.2.9)$$

kde d_h je průměr obtékaných trubek.

8.3. Metody tepelného výpočtu výměníku

Tepelný výpočet výměníku lze provést celou řadou metod, oborových norem atd. Základní metody jsou tedy [3]:

- ε -NTU* metoda
- P-NTU* metoda
- MTD** metoda

*NTU - Number of Transfer Units

**MTD - Mean Transfer Difference

U všech metod jsou idealizovány materiálové vlastnosti, předpokládá se, že měrná tepelná kapacita je konstantní a pokud je funkcí teploty, je nutné vypočítat u dané tekutiny střední teplotu, pro kterou se určí hodnota měrné tepelné kapacity. Stejný postup je nutné aplikovat i pro jiné fyzikální vlastnosti, jako hustota, tepelná vodivost, apod.

8.3.1. Metoda ε -NTU

U této metody je přestup tepla z teplé tekutiny do tekutiny studené ve výměníku vyjádřen rovnicí [3]

$$P_c = \varepsilon (Q_m c_p)_{\min} (t_{h,i} - t_{c,i}) \quad (8.3.1)$$

$$(Q_m c_p)_{\min} = \text{MIN}(Q_{m,c} c_{p,c}; (Q_{m,h} c_{p,h}))$$

Veličina ε představuje účinnost, která je funkcí celé řady proměnných a může nabývat pouze hodnot $0 \leq \varepsilon \leq 1$

$$\varepsilon = f(NTU, C^*) \quad (8.3.2)$$

veličina $\varepsilon = f(NTU, C^*)$ se vyjádřit vztahem

$$\varepsilon = \frac{Q_{m,h}c_{p,h}(t_{h,l} - t_{h,o})}{(Q_m c_p)_{\min}(t_{h,l} - t_{c,l})} = \frac{Q_{m,c}c_{p,c}(t_{h,l} - t_{h,o})}{(Q_m c_p)_{\min}(t_{h,l} - t_{c,l})} \quad (8.3.3)$$

Veličina NTU může nabývat hodnot $0 \leq NTU \leq \infty$ a je definována vztahem

$$NTU = \frac{kS}{(Q_m c_p)_{\min}} = \frac{1}{(Q_m c_p)_{\min}} \int_0^S k dS \quad (8.3.4)$$

Poměrný tok C^* může nabývat hodnot $0 \leq C^* \leq 1$ a je definována vztahem

$$C^* = \frac{(Q_m c_p)_{\min}}{(Q_m c_p)_{\max}} \quad (8.3.5)$$

8.3.2. Metoda P-NTU

P-NTU je varianta metody ε -NTU, která odstraňuje obecnost a upřesňuje výpočet vzhledem k různé konstrukci výměníků. U této metody je výpočet vztažen k jedné tekutině, protože ze vztahu vyplývá rovnost výkonů u obou tekutin. V této kapitole tak bude index 1 použit pro ohřívanou tekutinu a index 2 pro ochlazovanou (pro jednoduchost zde bude uveden postup výpočtu vztažený na ohřívanou tekutinu) [3].

$$P = P_1 Q_{m,1} c_{p,1} (t_{1,l} - t_{2,l}) \quad (8.3.6)$$

Veličina P_1 představuje tepelnou účinnost, která je funkcí veličiny NTU, teplotního odporu R_1 a typu výměníku (soproudý, protiproudý a křížový výměník)

$$P_1 = f(NTU_1, R_1, \text{typ výměníku}) \quad (8.3.7)$$

Teplotní odpor R_1 je možné stanovit na základě teplot obou tekutin

$$R_1 = \frac{(t_{2,l} - t_{2,o})}{(t_{1,o} - t_{1,l})} \quad (8.3.8)$$

Pro přehlednost zde ještě uvedeme vztahy pro přepočítání mezi kapalinou 1 a 2

$$\begin{aligned} P &= P_1 Q_{m,1} c_{p,1} |t_{1,l} - t_{2,l}| = P_2 Q_{m,2} c_{p,2} |t_{2,l} - t_{1,l}| \\ P_1 &= P_2 R_2 & P_2 &= P_1 R_1 \\ NTU_1 &= NTU_2 R_2 & NTU_2 &= NTU_1 R_1 \end{aligned} \quad (8.3.9)$$

$$R_1 = \frac{1}{R_2}$$

8.3.3. Metoda MTD

Tato metoda dále upravuje výpočty u metody P-NTU a zavádí korekční faktor F . V této metodě se nepočítá s prostým rozdílem teplot, ale se střední logaritmickou teplotní diferencí Δt_{lm} (Mean Log Temperature). Výkon je pak definován prostřednictvím vztahu [3]

$$P = kSF\Delta t_{lm} \quad (8.3.10)$$

Střední logaritmická teplotní diference je dána vztahem, který je závislý na způsobu proudění tekutin ve výměníku.

$$\Delta t_{lm} = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\ln \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}} \quad (8.3.11)$$

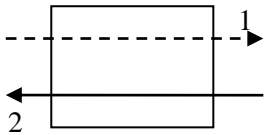
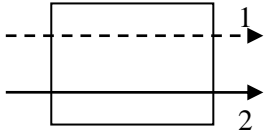
kde teplotní diference Δt_1 a Δt_2 jsou definovány

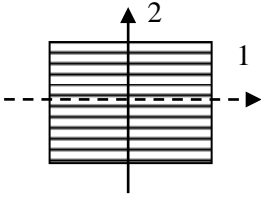
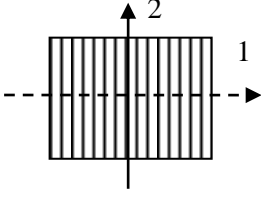
$$\Delta t_1 = t_{h,l} - t_{c,o}, \Delta t_2 = t_{h,o} - t_{c,l} \text{ pro všechny výměníky vyjma souproutého} \quad (8.3.12)$$

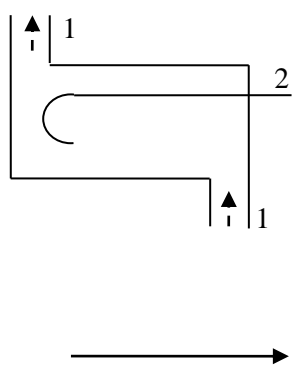
$$\Delta t_1 = t_{h,l} - t_{c,l}, \Delta t_2 = t_{h,o} - t_{c,o} \text{ pro souproutý výměník}$$

V následující tabulce jsou uvedeny výpočtové vztahy pro základní konstrukční typy výměníků pro metodu P-NTU a MTD, viz [3].

Tab. 8.1 Základní výpočtové vztahy pro jednotlivé typy výměníků u metody P-NTU a MTD,

Typ výměníku	vztahy
Protiproudý výměník 	$P_1 = \frac{1 - \exp(-NTU_1(1 - R_1))}{1 - R_1 \exp(-NTU_1(1 - R_1))}$ $NTU_1 = \frac{1}{1 - R_1} \ln \left(\frac{1 - R_1 P_1}{1 - P_1} \right)$ $F = 1$
Souproutý výměník 	$P_1 = \frac{1 - \exp(-NTU_1(1 + R_1))}{1 + R_1}$ $NTU_1 = \frac{1}{1 + R_1} \ln \left(\frac{1}{1 - P_1(1 + R_1)} \right)$

	$F = \frac{(R_1 + 1) \ln\left(\frac{1 - R_1 P_1}{1 - P_1}\right)}{(R_1 - 1) \ln(1 - P_1(1 + R_1))}$
<p>Křížový výměník</p> <p>1 - proudí v trubkách, nebo voštiny</p> <p>2 - obtéká trubky</p> 	$P_1 = \frac{1 - \exp(-KR_1)}{R_1}$ $K = 1 - \exp(-NTU_1)$ $NTU_1 = \ln\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{R_1} \ln(1 - R_1 P_1)}\right)$ $F = \frac{\ln\left(\frac{1 - R_1 P_1}{1 - P_1}\right)}{(R_1 - 1) \ln\left(1 + \frac{1}{R_1} \ln(1 - R_1 P_1)\right)}$
<p>Křížový výměník</p> <p>1 - obtéká trubky</p> <p>2 - proudí v trubkách nebo voštiny</p> 	$P_1 = 1 - \exp\left(-\frac{K}{R_1}\right)$ $K = 1 - \exp(-R_1 NTU_1)$ $NTU_1 = \frac{1}{R_1} \ln\left(\frac{1}{1 + R_1 \ln(1 - P_1)}\right)$ $F = \frac{\ln\left(\frac{1 - R_1 P_1}{1 - P_1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{R_1}\right) \ln(1 + R_1 \ln(1 - P_1))}$
<p>Skořepino-trubkový výměník</p> <p>1 - proudí v tubusu</p> <p>2 - proudí v trubkách</p>	$P_1 = \frac{2}{1 + R_1 + E \coth\left(\frac{E \cdot NTU_1}{2}\right)}$ $E = \sqrt{1 + R_1}$ $NTU_1 = \frac{1}{E} \ln\left(\frac{2 - P_1(1 + R_1 - E)}{2 - P_1(1 + R_1 + E)}\right)$



$$F = \frac{E \ln\left(\frac{1 - P_1 R_1}{1 - P_1}\right)}{(1 - P_1) \ln\left(\frac{2 - P_1(1 + R_1 - E)}{2 - P_1(1 + R_1 + E)}\right)}$$

8.4. Řešení souproudého a protiproudého výměníku

Pro ilustraci proudového a teplotního pole bylo zvoleno zjednodušené schéma souproudého výměníku. Proudícími médii jsou voda a případně vzduch (který simuluje např. spaliny ve výměníku krbových kamen). Fyzikální vlastnosti plynu obecně jsou významně závislé na teplotě, která se bude měnit, proto budou v dalším uvedeny možnosti definování těchto závislostí. Fyzikální vlastnosti vody je možno definovat vzhledem k rozsahu teplot jako konstantní nebo jako závislé na teplotě metodami dříve popsanými. V závěru budou zhodnoceny možnosti grafického vyhodnocení. Okrajové podmínky proudění budou určovat typ proudění (laminární nebo turbulentní) a tudíž také matematický model. Vyhodnocení bude provedeno pomocí trajektorií proudění, izoploch v předem definovaných plochách a grafů.

8.4.1. Fyzikální vlastnosti plynů (kinetická teorie)

V kap.1.3 byly definovány základní fyzikální veličiny, kde hustota plynů je dána stavovou rovnicí a je schopna zohlednit vliv teploty i tlaku, tedy

$$pV = m \frac{R}{M} T \Rightarrow \rho = \frac{Mp}{RT} = \frac{p}{rT} \quad (8.4.1)$$

Kinetická teorie

Ostatní fyzikální veličiny se definují v závislosti na teplotě experimentálně zjištěnými závislostmi, jako polynom, tabulka, atd. Podle kinetické energie ideálního plynu [6] mohou být definovány následující fyzikální vlastnosti a parametry:

- viskozita
- tepelná vodivost
- měrná tepelná kapacita

- koeficienty difúze hmoty (pro multi-speciální druhy směsi)

Definice dynamické viskozity μ při užití kinetické teorie je následující:

$$\mu = 2.67 \cdot 10^{-6} \frac{\sqrt{MT}}{\sigma^2 \Omega_\mu} \quad (8.4.2)$$

kde

$$\Omega_\mu = \Omega_\mu(T^*) \quad \text{a} \quad T^* = \frac{T}{(\varepsilon / k_B)} \quad (8.4.3)$$

Funkce Ω_μ je experimentálně určenou závislostí na bezrozměrné teplotě, např. [8] :

$$\Omega_\mu = \frac{1.16145}{(T^*)^{0.14874}} + \frac{0.52487}{\exp(0.77320T^*)} + \frac{2.16178}{\exp(2.43787T^*)}$$

Vzorec pro měrnou tepelnou kapacitu c_p při užití kinetické teorie je:

$$c_p = \frac{R}{M}(f + 2) \quad (8.4.4)$$

kde f je počet modů energie (počet stupňů volnosti). Tepelná vodivost λ při užití kinetické teorie je vyjádřena takto:

$$\lambda = \frac{15}{4} \frac{R}{M} \mu \left[\frac{4}{15} \frac{c_p M}{R} + \frac{1}{3} \right] \quad (8.4.5)$$

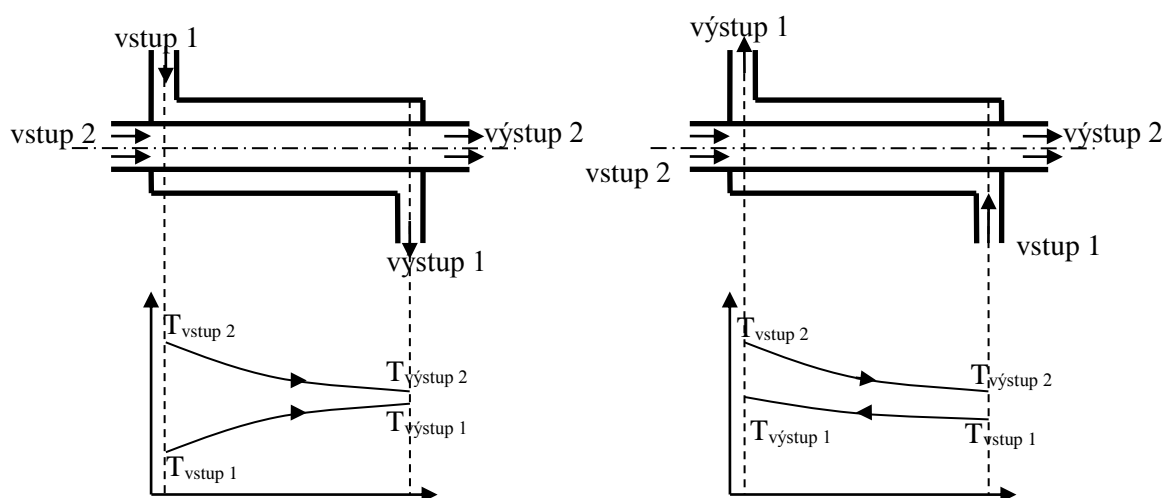
Parametry vzduchu, vodní páry případně dalších plynů pro kinetickou teorii jsou uvedeny v databázi Fluentu a jsou [9]:

Tab. 8.2 – Parametry vzduchu a páry pro kinetickou teorii

látka	Molekulová hmotnost	Lennardovy-Jonesovy parametry	
	M [kg·kmol ⁻¹]	σ (Å)	ε/k_B (°K)
vzduch	29	3.617	97
pára H ₂ O	18	2.605	572.4

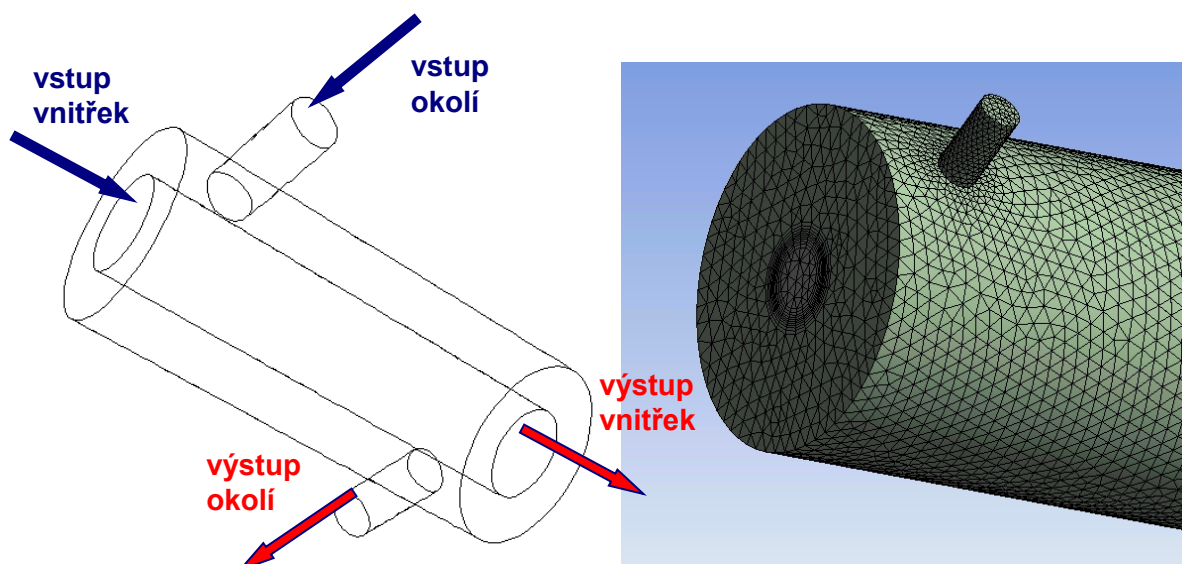
8.4.2. Souproudý výměník voda-voda

Proudění v souproudém výměníku bylo testováno za účelem potvrdit průběhy teplot prezentovaných v kap.8.1.



Proudění je třeba předpokládat velmi pomalé, aby došlo k přestupu tepla na dané geometrii a rozložení teploty mohlo být prezentováno typickým poklesem resp. růstem teploty. Jak bude prezentováno dále, proudění musí být laminární, bohužel takový zdroj kapaliny není reálný. Proto budou následující příklady již věnovány reálnému proudění.

Schéma oblasti s vyznačením vstupů a výstupů a síť jsou zobrazeny na obr. 8.15.



obr. 8.15 Schéma oblasti a síť

Rozměry oblasti, vstupu a výstupu jsou dány v Tab. 13.3.

Tab. 8.3

Oblast	$x=$ 0.5	m			
	$y=$ 0.12	m			
	$z=$ 0.08	m			
vstup okolí – voda	$S=$ 7.65E-05	m ²	$d=$ 0.01	m	
vstup vnitřek - voda	$S=$ 0.00031214	m ²	$d=$ 0.02	m	

Pro jednoduchost byla vytvořena síť se zhuštěním kolem vnitřní trubky o prvcích tvaru čtyřstěnu o počtu 422 085 buněk.

Fyzikální vlastnosti a matematický model

V dané oblasti představující souproudý chladič, proudí uprostřed kapalina (voda) a v příčném směru pro jednoduchost také voda. Stěny jsou tvořeny ocelovými trubkami o různém průměru. Kapalina se předpokládá jako nestlačitelná kapalina s konstantními fyzikálními vlastnostmi (při vyšších změnách teploty může být dána funkční závislostí). Základní parametry plynů a kapalin lze najít a kopírovat z databáze Fluentu včetně Lennardových – Jonesových parametrů.

Tab. 8.4

Fyzikální vlastnosti	jednotky	voda
hustota	kgm ⁻³	$\rho=$ 998
měrná tepel. kapacita	J.kg ⁻¹ K ⁻¹	$c_p=$ 4182
Viskozita kinematická	m ² s ⁻¹	$\nu=$ 0.000001
viskozita dynamická	Pa.s	$\eta=$ 9.98E-04
tepelná vodivost	Wm ⁻¹ K ⁻¹	$\lambda=$ 0.6
teplotní vodivost	m ² s ⁻¹	$a=$ 1.44E-07

Z odhadu hmotnostního průtoku bylo určeno Reynoldsovo číslo, jehož hodnota je nízká, jedná se o laminární proudění, viz Tab. 8.5. Další parametry, jako je odhad Nusseltova čísla a součinitele přestupu tepla, se nebudou určovat, protože pro geometrii tohoto výměníku nejsou empiricky definovány.

Tab. 8.5

		Trubka vnitřní	Trubka vnější
		voda	voda
hmot. průtok	kg s ⁻¹	$Q_m=$ 0.0003	0.0003

rychlost	ms^{-1}	$u=$ 0.00096	0.0038
Reynoldsovo číslo		$\text{Re}=$ 19	38

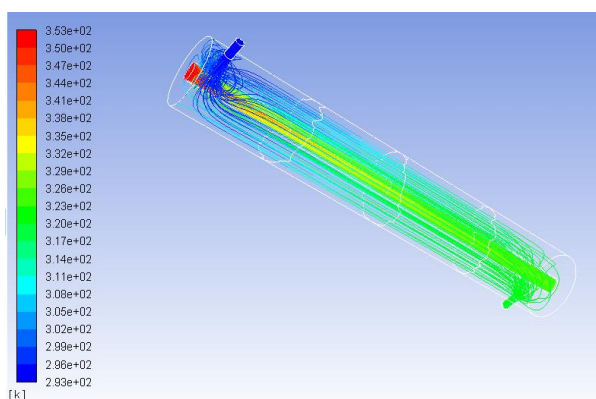
Okrajové podmínky

Vzhledem k tomu, že se jedná o ilustrativní příklad, kde budou sledovány trajektorie proudění, teploty, hustoty, byly okrajové podmínky předběžně definovány a upravovány tak, aby byly výrazně vidět tyto charakteristické veličiny. Vstupní veličinou je hmotnostní průtok.

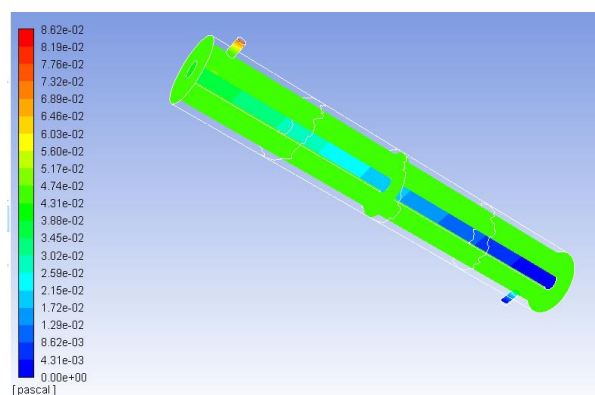
Tab. 8.6

	hmotnostní průtok [$\text{kg}^3 \cdot \text{s}^{-1}$]	statický tlak [Pa]	totální teplota [°C]
vstup okolí	0.0003		20
vstup vnitřek	0.0003		80
výstup okolí		0	
výstup vnitřek		0	

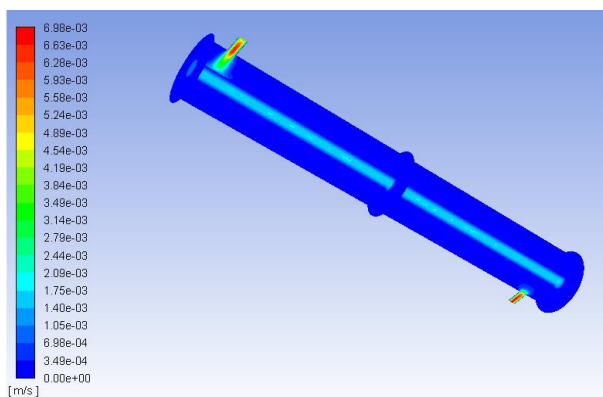
Numerický výpočet je velmi stabilní a dobře konverguje. Složitost proudění je možno vyhodnotit trajektoriemi proudění elementů kapaliny barvených teplotou (obr. 8.16). Ta se projeví i na dalších veličinách, tlak, rychlost a teplota, viz obr. 8.17 až obr. 8.19. Typické rozložení teploty podél osy, tj. klesající průběh v oblasti „okolí“ a rostoucí průběh v oblasti „vnitřek“ je možno vyhodnotit pomocí teploty v plochách rovnoběžných s osou trubek, viz obr. 8.20 a obr. 8.20. Graf typický pro souprůdý výměník by bylo možno získat převedením grafu do Excelu a proložením spojnice trendu.



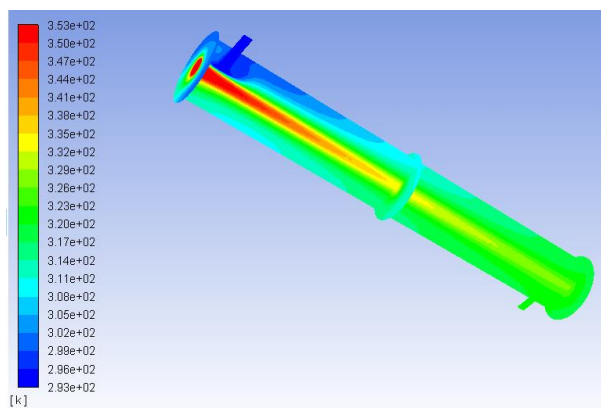
obr. 8.16 Trajektorie částic barvených teplotou



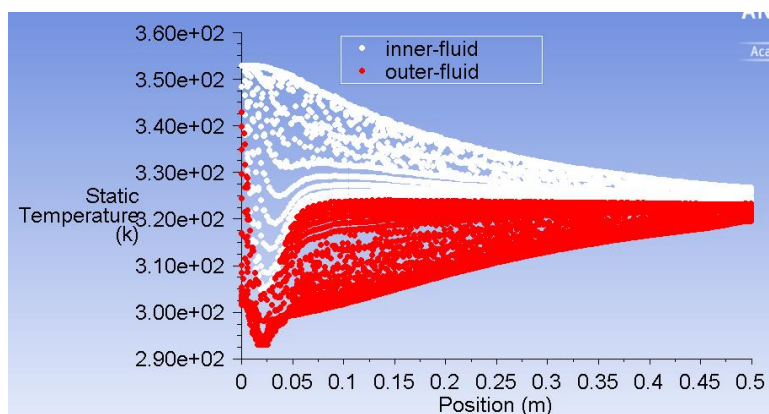
obr. 8.17 Statický tlak v osovém směru a ve třech příčných rovinách



obr. 8.18 Velikosti rychlosti v osovém směru a ve třech příčných rovinách

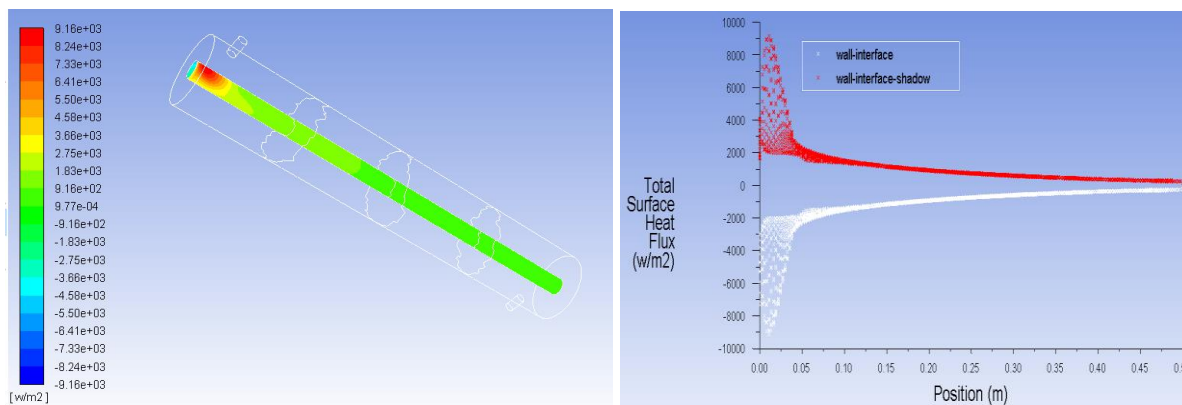


obr. 8.19 Statická teplota v osovém směru a ve třech příčných rovinách



obr. 8.20 Statická teplota v oblasti vnitřku trubky a okolí

Hustota tepelného toku je významný parametr specifikující přestup tepla a je vyhodnocen hodnotami na celé ploše vnitřní trubky případně grafem, viz obr. 8.21.

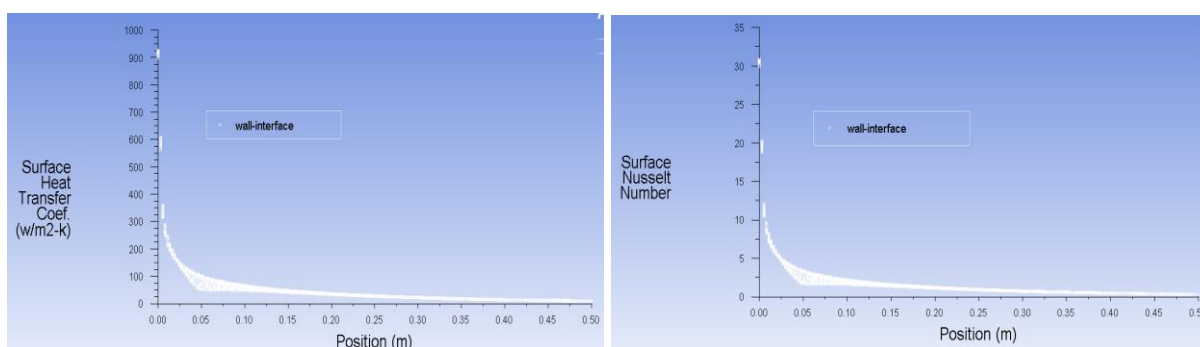


obr. 8.21 Hustota toku tepla

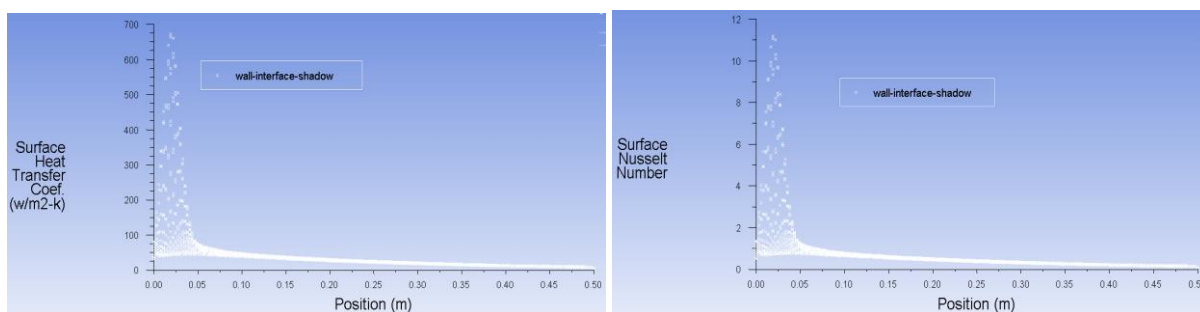
Součinitel přestupu tepla a Nusseltovo číslo jsou vyhodnocovány na stěně. Hodnoty jsou určeny na základě hustoty tepelného toku směrem k vnitřní nebo vnější proudící tekutině. Protože stěna je zdvojená (two-sided wall), je třeba určit, která stěna náleží vnitřní trubce (wall-interface) a která stěna okolí (wall-interface-shadow) příkazem Boundary condition.

Využijí se vztahy pro součinitel přestupu tepla $\alpha = \frac{q}{T_s - T_{ref}}$ a Nusseltova čísla $Nu = \frac{\alpha d_{ref}}{\lambda}$.

Z definice je zřejmé, že referenční hodnoty teploty a hydraulického průměru souvisejí s tím, kterým směrem se určuje přestup tepla, zdali ve směru do vnitřní trubky (wall-interface) nebo do okolí (wall-interface-shadow), viz obr. 8.22 a obr. 8.23

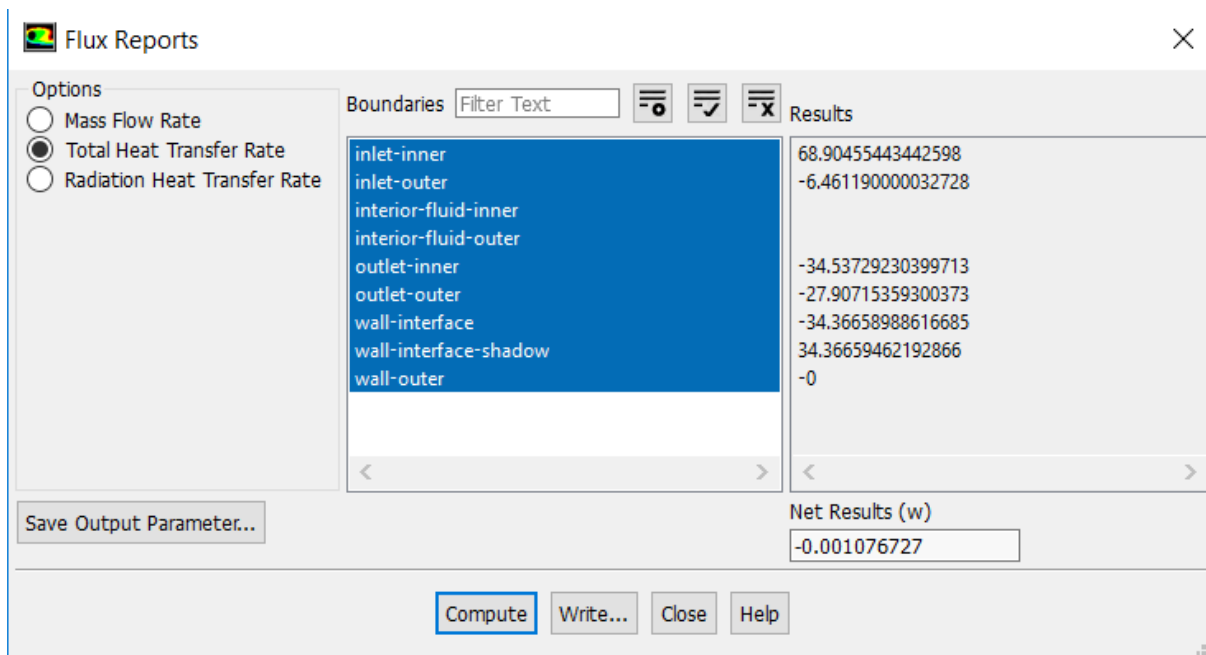


obr. 8.22 Součinitel přestupu tepla a Nusseltovo číslo na stěně wall-interface vzhledem k vnitřku oblasti $T_{ref}=353$ K, $d_h=0.02$ m



obr. 8.23 Součinitel přestupu tepla a Nusseltovo číslo na stěně wall-interface-shadow vzhledem k vnějšku oblasti $T_{ref}=293$ K, $d_h=0.01$ m

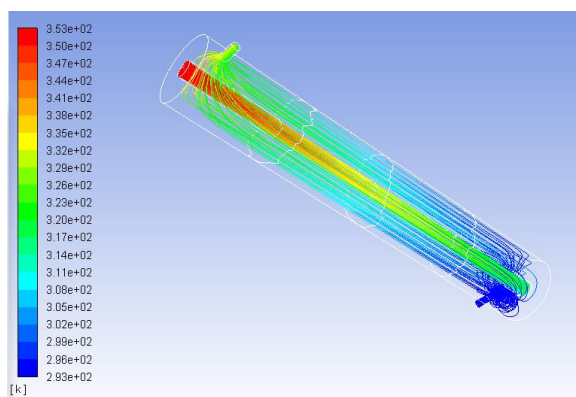
Tepelný výkon tohoto výměníku přes všechny definované plochy lze určit také:



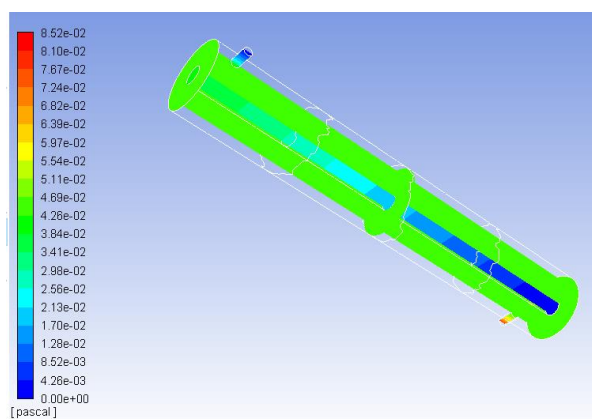
Po podrobném propočtu úbytku tepelného výkonu mezi vstupy a výstupy se získá hodnota stejná jako tepelný výkon přes stěnu wall interface a je roven 34 W. Z výpočtu lze určit také průměrné hodnoty teplot na výstupu, součinitele přestupu tepla a Nusseltova čísla atd.

8.4.3. Protiproudý výměník voda-voda

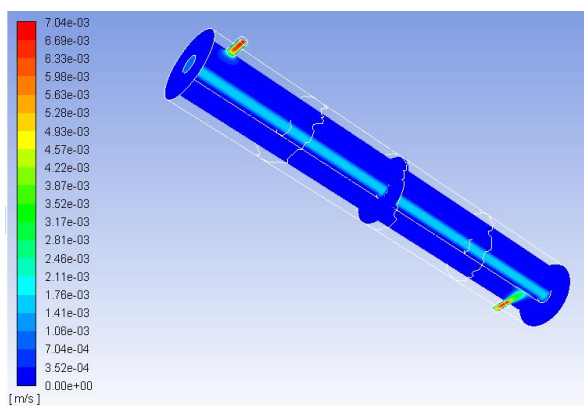
Geometrie pro protiproudý výměník je shodná s úlohou definovanou v kap. 8.4.2 jako souproudý výměník. Okrajové podmínky jsou také shodné, pouze se vyměnil vstup a výstup pro vnější oblast proudění. Na obr. 8.24 až obr. 8.27 jsou vyhodnoceny trajektorie částic, tlak, rychlost a teplota ve vybraných řezech.



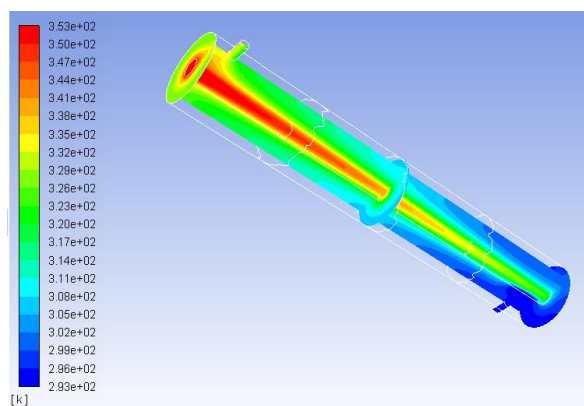
obr. 8.24 Trajektorie částic barvených teplotou



obr. 8.25 Statický tlak v osovém směru a ve třech příčných rovinách

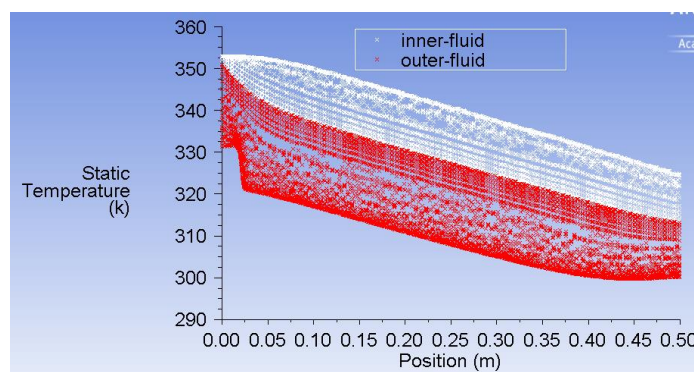


obr. 8.26 Velikosti rychlosti v osovém směru a ve třech příčných rovinách



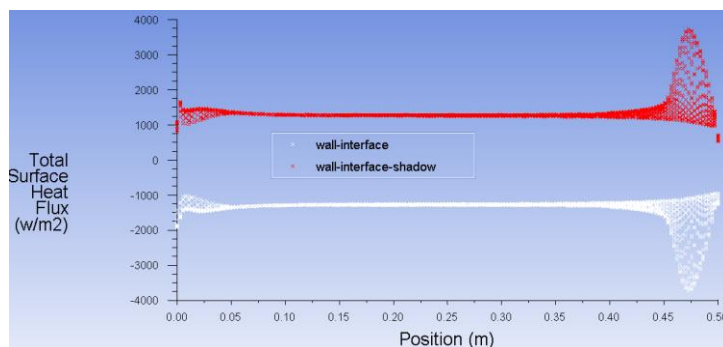
obr. 8.27 Statická teplota v osovém směru a ve třech příčných rovinách

Na obr. 8.28 je patrný typický pokles teplot v obou oblastech proudění u protiproudého výměníku, patrnější by to bylo převedením do Excelu a proložením spojnice trendu.



obr. 8.28 Statická teplota v oblasti vnitřku trubky a okolí

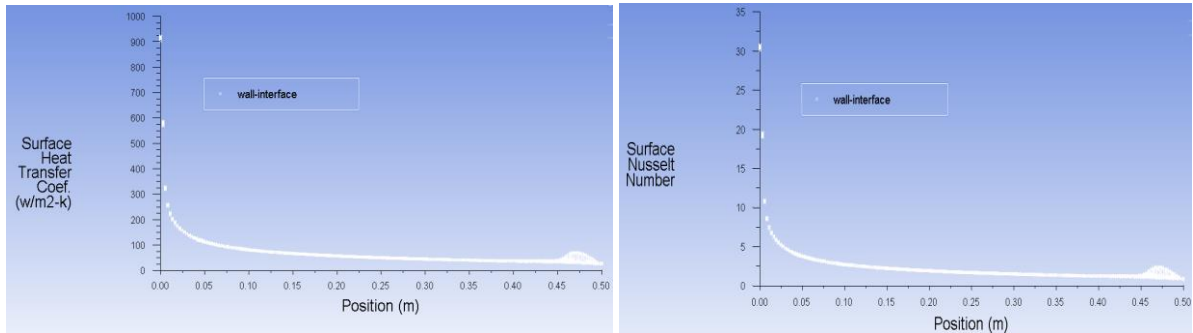
Na obr. 8.29 je vyhodnocena hustota tepelného toku na stěně rozhraní a rozhraní – shadow, tj. na stěně trubky z vnitřní a vnější strany.



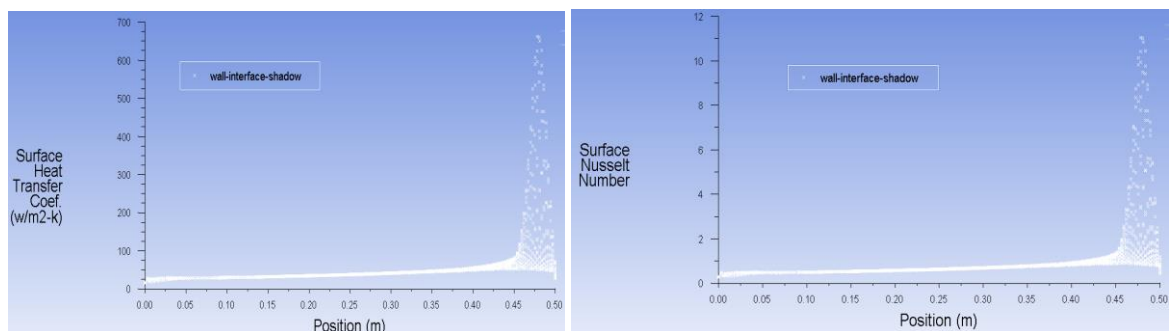
obr. 8.29 Hustota toku tepla

Součinitel přestupu tepla a Nusseltovo číslo jsou vyhodnocovány na stěně na základě hustoty tepelného toku směrem k vnitřní nebo vnější proudící tekutině dle vztahů

$$\alpha = \frac{q}{T_s - T_{ref}} \text{ a následně } Nu = \frac{\alpha d_{ref}}{\lambda}.$$



obr. 8.30 Součinitel přestupu tepla a Nusseltovo číslo na stěně vzhledem k vnitřku oblasti $T_{ref}=353 \text{ K}$, $d_h=0.02 \text{ m}$



obr. 8.31 Součinitel přestupu tepla a Nusseltovo číslo na stěně směrem k vnějšku oblasti $T_{ref}=293 \text{ K}$, $d_h=0.01 \text{ m}$

Tepelný výkon tohoto výměníku přes všechny definované plochy lze určit také:

Options

- Mass Flow Rate
- Total Heat Transfer Rate
- Radiation Heat Transfer Rate

Boundaries

Boundary	Results
inlet-inner	68.848180213147
inlet-outer	-6.461189999987454
interior-fluid-inner	
interior-fluid-outer	
outlet-inner	-26.54901631739769
outlet-outer	-35.83909397045354
wall-interface	-42.30022869631642
wall-interface-shadow	42.30022480809633
wall-outer	-0

Net Results (w)

Save Output Parameter...

Tepelný výkon přes stěnu trubky je 42 W. Z výpočtu lze určit také průměrné hodnoty teplot na výstupu, součinitele přestupu tepla a Nusseltova čísla atd.

8.4.4. Souproudý výměník voda-vzduch

Při řešení souproudého výměníku pro vodu a vzduch byla použita geometrie a síť shodná s kap. 8.4.2. Proudící médium ve výměníku je voda a ve vnitřních trubkách výměníku bude vzduch o vysoké teplotě (náhrada spalin). Proudění bude turbulentní a okrajové podmínky budou nastaveny jako reálné podmínky typické pro výměník krbových kamen.



Postup řešení

Řešení problému proudění plynů s přestupem tepla je složitý problém, kdy při zadání úplného matematického modelu může často dojít k divergenci. Proto pro řešení byla použita tzv. metoda step – by step, tj. postup, při kterém se řeší z hlediska numerické stability a konvergence příklad co nejsnazší a následně se upravují turbulentní modely, síť, stěnové funkce, případně okrajové podmínky. V našem případě to znamená, že se postupně řešily varianty:

- řešení s konstantními fyzikálními vlastnostmi, turbulentním RNG $k-\varepsilon$ modelem,
- řešení s fyzikálními vlastnostmi závislými na teplotě případně tlaku
- pokud stacionární výpočet nekonverguje, úloha je řešena jako časově závislá úloha a využije se průměrování pro získání středních hodnot proudění,
- řešení s kvalitnějším $k-\omega$ turbulentním modelem sst, který je vhodný pro nízká Reynoldsova čísla
- oprava hmotnostních průtoků tak, aby teplotní gradient odpovídal realitě (vyhodnocování pomocí průměrných hodnot rychlostí a teplot na vstupech a výstupech)

Fyzikální vlastnosti, matematický model, okrajové podmínky

Konstantní fyzikální vlastnosti pro vodu a vzduch jsou převzaty z databáze Fluentu.

Pro určení Reynoldsova čísla $Re = \frac{ud_h}{\nu}$ ale byla použita hustota vzduchu při teplotě 1100

°C, viz Tab. 8.7 .

Tab. 8.7

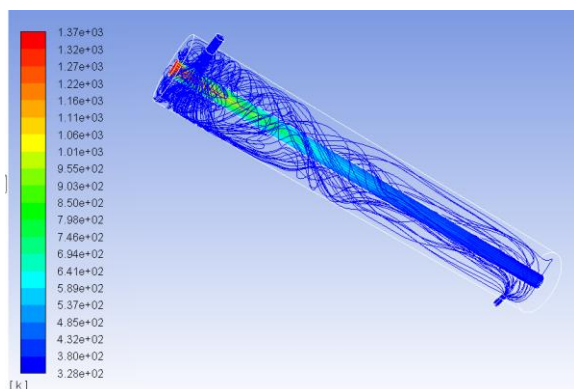
			Trubka vnější	Trubka vnitřní
tlak	Pa	$\rho_{ref} =$	101325	101325
teplota	°C	$T_{ref} =$	55	1100
teplota absolutní	K	$T_{ref} =$	328	1373
hustota	kgm ⁻³	$\rho =$	998	0.255
hmot. průtok	kgs ⁻¹	$Q_m =$	0.03	0.0003
rychlost	ms ⁻¹	$u =$	0.38274	3.74482
Reynoldsovo číslo		$Re =$	3827	4713

Pro výpočet je uvažována voda opět s konstantními vlastnostmi a vzduch s fyzikálními vlastnostmi definovanými kinetickou teorií. Matematický model je specifikován jako turbulentní. Úloha musela být řešena jako časově závislá a výsledky jsou střední hodnoty všech vyhodnocovaných veličin včetně turbulentních. Po těchto úvahách je možno definovat okrajové podmínky následovně:

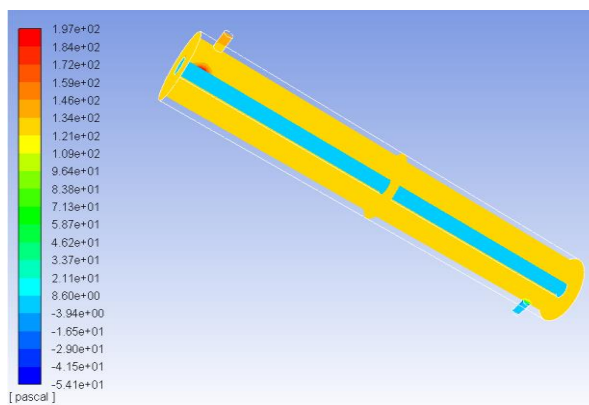
Tab. 8.8

Okrajové podmínky	hmotnostní průtok [kg·s ⁻¹]	statický tlak [Pa]	totální teplota [°C]	intenzita turbulence [%]	hydraulický průměr [m]
vstup okolí	0.0003		55	1	0.01
vstup vnitřek	0.03		1100	1	0.02
výstup okolí		0		1	0.01
výstup vnitřek		0		1	0.02

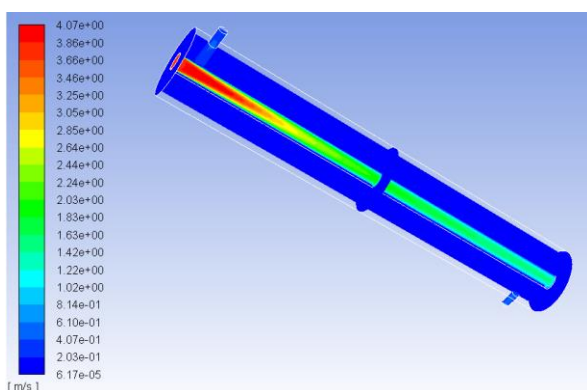
Pro představu jsou opět vyhodnoceny střední hodnoty základních hydraulických veličin.



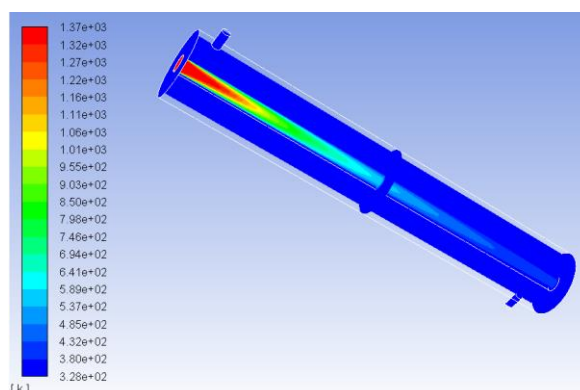
obr. 8.32 Trajektorie částic barvených teplotou



obr. 8.33 Střední statický tlak v osovém směru a ve třech příčných rovinách

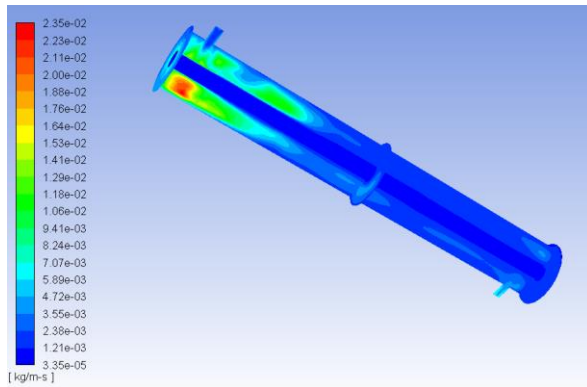


obr. 8.34 Velikosti střední rychlosti v osovém směru a ve třech příčných rovinách

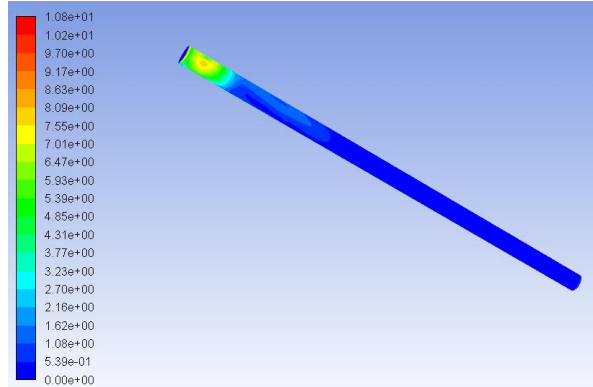


obr. 8.35 Střední statická teplota v osovém směru a ve třech příčných rovinách

Efektivní viskozita (součet turbulentní a molekulové viskozity) je velmi nízká, minimálně převyšuje turbulentní viskozitu, viz obr.8.36. To znamená, že proudění je v přechodové oblasti mezi laminárním a turbulentním modelem, což dokladuje také hodnota Re čísla v počátečním odhadu. Bezrozměrný rozměr první buňky u stěny vnitřní trubky je do 10 (obr. 8.37), což znamená, že síť je velmi jemná, spíše by mohla být hrubší u stěny. Lépe bude vyhovovat dvouvrstvá stěnová funkce (Enhanced Wall Treatment, y^+ má být do 5) než logaritmická stěnová funkce (y^+ má být mezi 30 a 60).

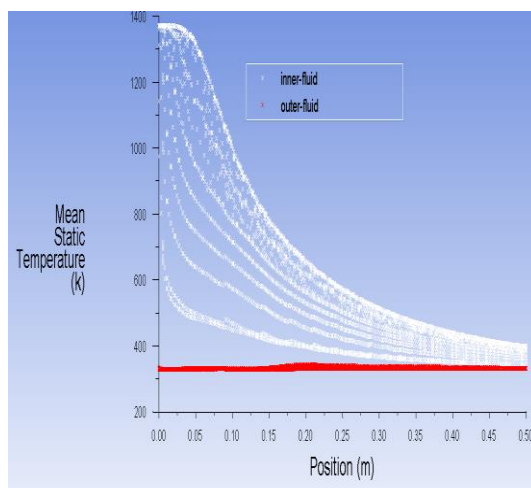


obr.8.36 Efektivní viskozita v osovém směru a ve třech příčných rovinách

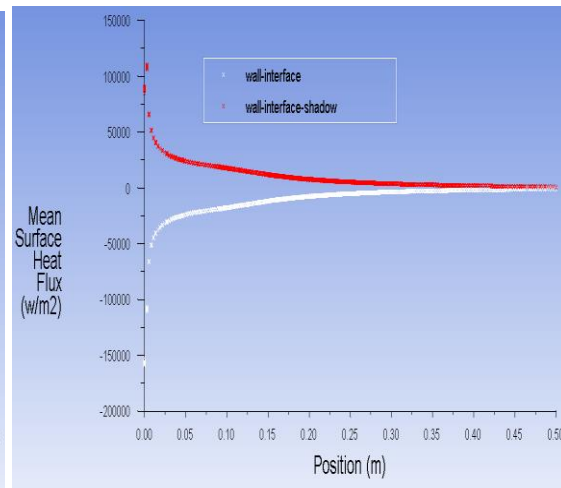


obr. 8.37 y^+ na stěně trubky

Na obr.8.38 je možno pozorovat typický pokles teploty u plynu a mírný nárůst teploty vody, což je charakteristické pro souprůdný výměník. Hustota tepelného toku je opět symetrická na stěně vnitřní trubky ze strany kapaliny a ze strany plynu, viz obr. 8.39.

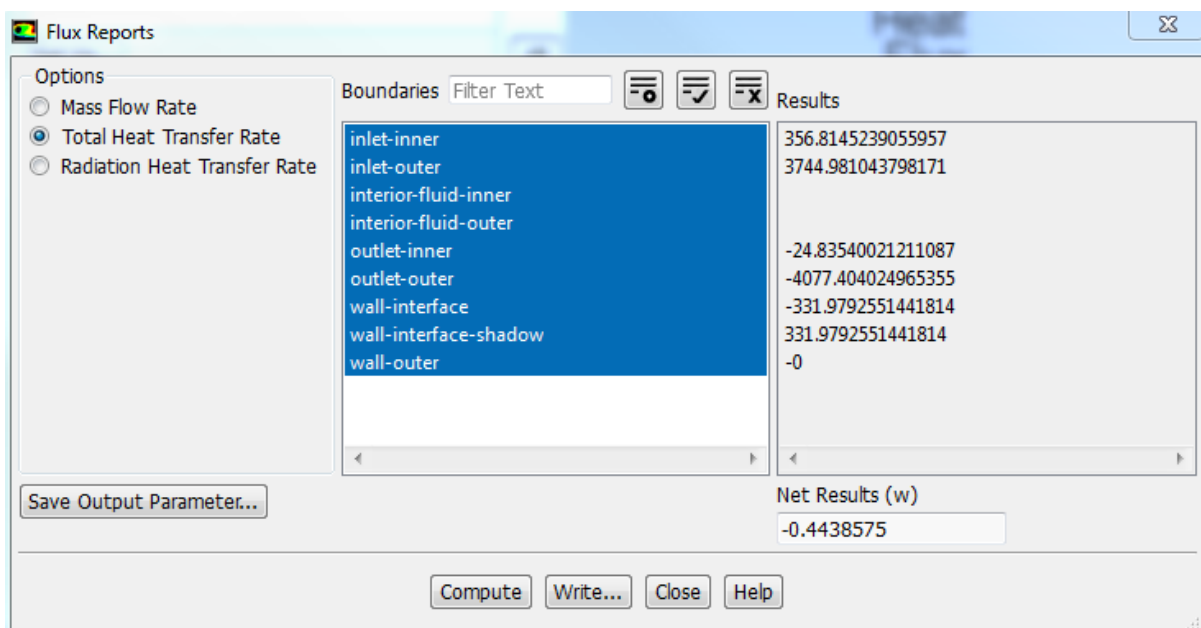


obr.8.38 Střední teplota v proudící kapaliny a plynu v osovém směru



obr. 8.39 Hustota tepelného toku na stěně vnitřní trubky

Tepelný výkon skrz stěny je :



.Z výpočtu lze určit také průměrné hodnoty teplot na výstupu, součinitele přestupu tepla a Nusseltova čísla atd.

8.4.5. Souproudý výměník vzduch-voda-vzduch

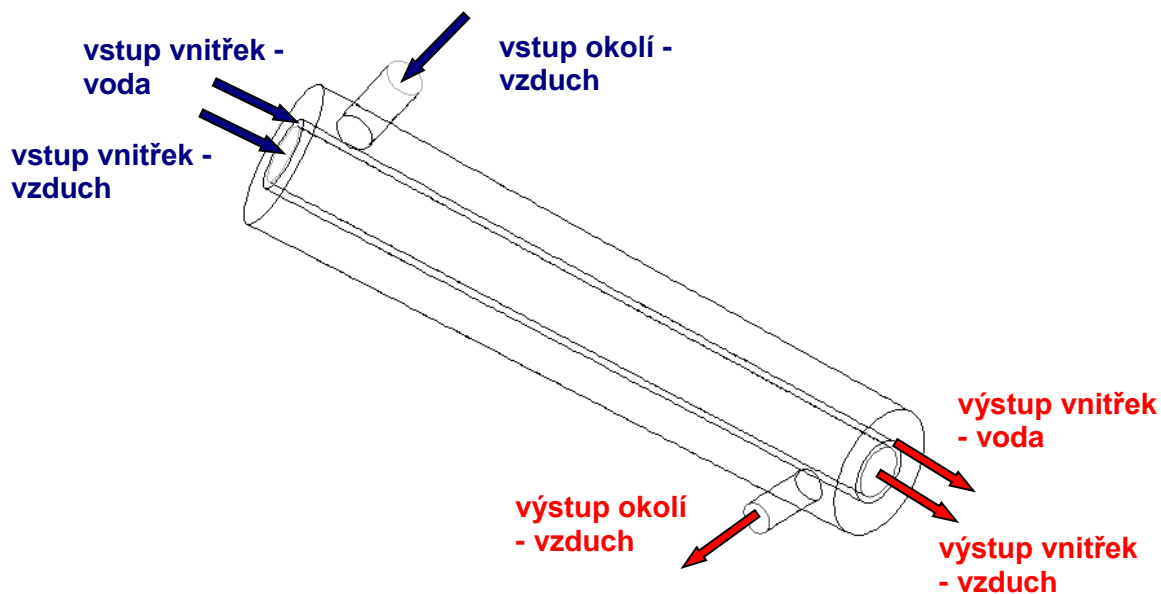
Zkvalitnit ochlazování a ohřívání proudících médií lze zvýšením teplosměnné plochy. Toho lze dosáhnout prodloužením oblasti a vložením další trubky s proudícím vzduchem do vnitřku oblasti, viz obr. 8.40. Vložení trubky dovnitř oblasti představuje zjednodušeně systém trubek v axiálním směru.

Rozměry oblasti, vstupu vzduchu a vody jsou dány v tabulce.

Tab. 8.9

Oblast	$x=$ 0.2	m		
	$y=$ 0.09	m		
	$z=$ 0.04	m		
vstup okolí – vzduch	$S=$ 7.65E-05	m ²	$d=$ 0.01	m
vstup vnitřek - voda	$S=$ 5.7676E-05	m ²	$d=$ 0.02	m
vstup vnitřek - vzduch	$S=$ 0.00025447	m ²	$d=$ 0.018	m

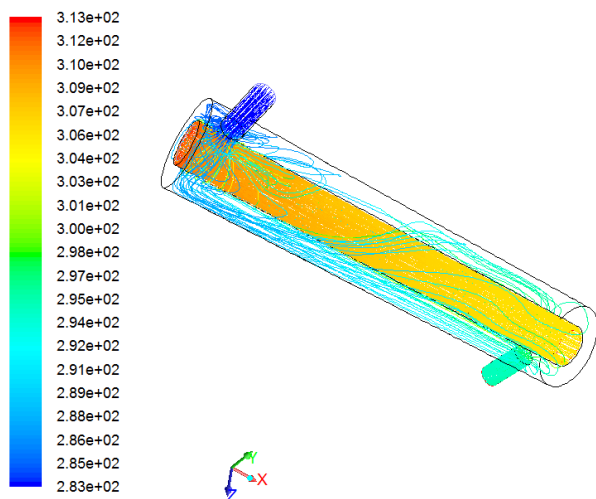
Fyzikální vlastnosti proudících médií se shodují s předchozí úlohou.



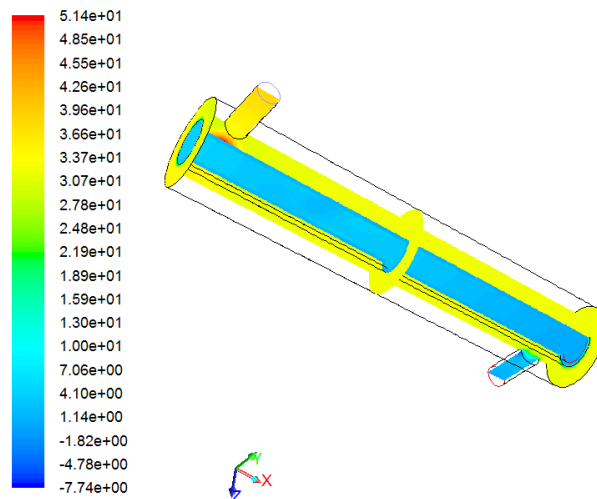
obr. 8.40 Schéma oblasti

Okrajové podmínky

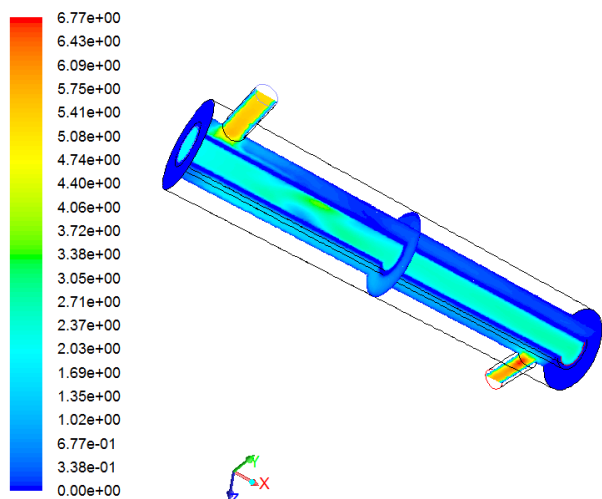
Okrajové podmínky byly vyladěny, aby bylo možno sledovat průběhy hydraulických veličin a teploty.



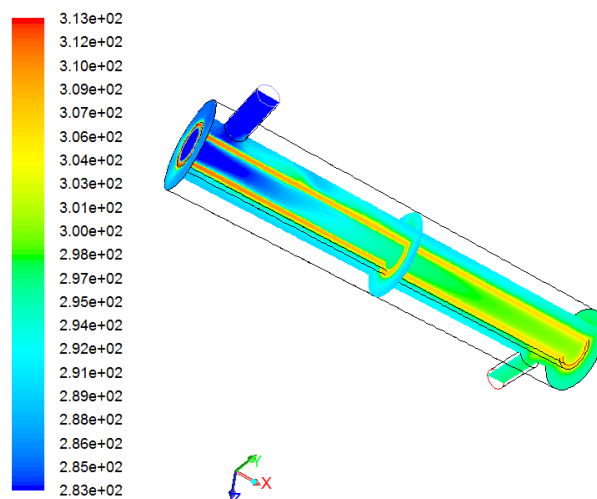
obr. 8.41 Trajektorie částic barvených teplotou



obr. 8.42 Statický tlak v osové směru a ve třech příčných rovinách

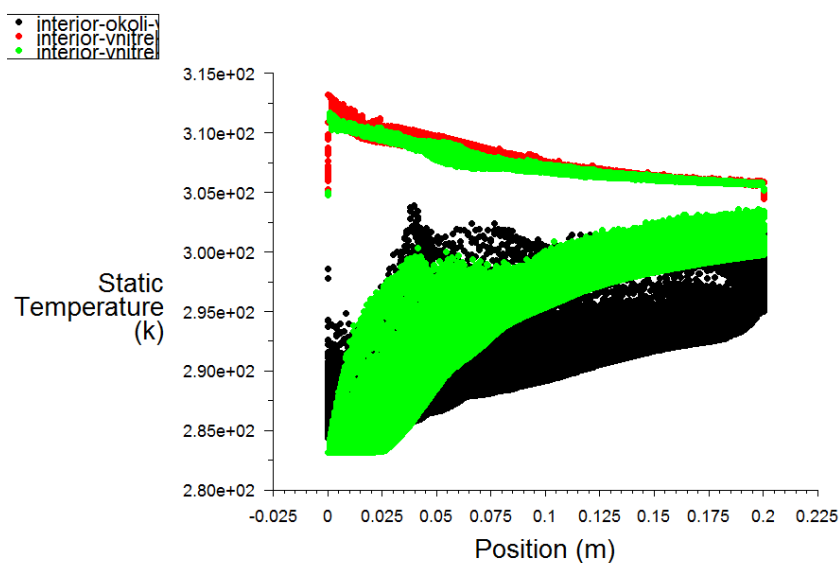


obr. 8.43 Velikosti rychlosti v osovém směru a ve třech příčných rovinách



obr. 8.44 Statická teplota v osovém směru a ve třech příčných rovinách

Na předchozích obrázcích je možno vyhodnotit rozdílnost v proudění se souprůdným výměníkem voda – vzduch. Na obr. 8.45 je patrná výraznější změna teploty ve směru proudění.



obr. 8.45 Statická teplota v oblasti vnitřku trubky, okolí a na rozhraní mezi nimi

Tepelný výkon vnější stěny je 6.25 W a vnitřní stěny 9.07 W. V následující tabulce jsou určeny průměrné hodnoty teplot a tlaků na vstupech a výstupech.

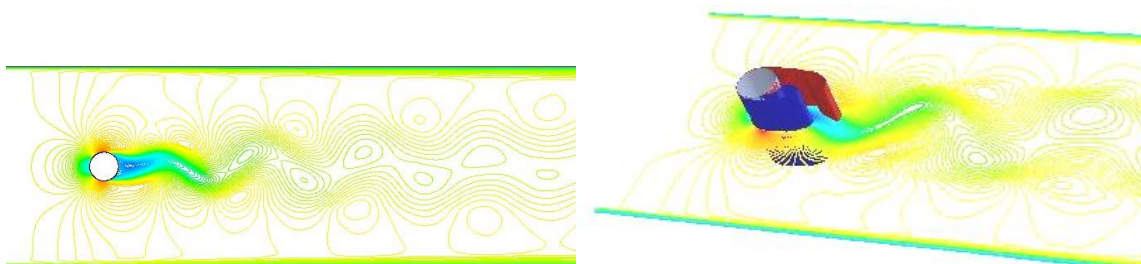
Tab. 8.10 **Souprůdný výměník**

vzduch - voda – vzduch

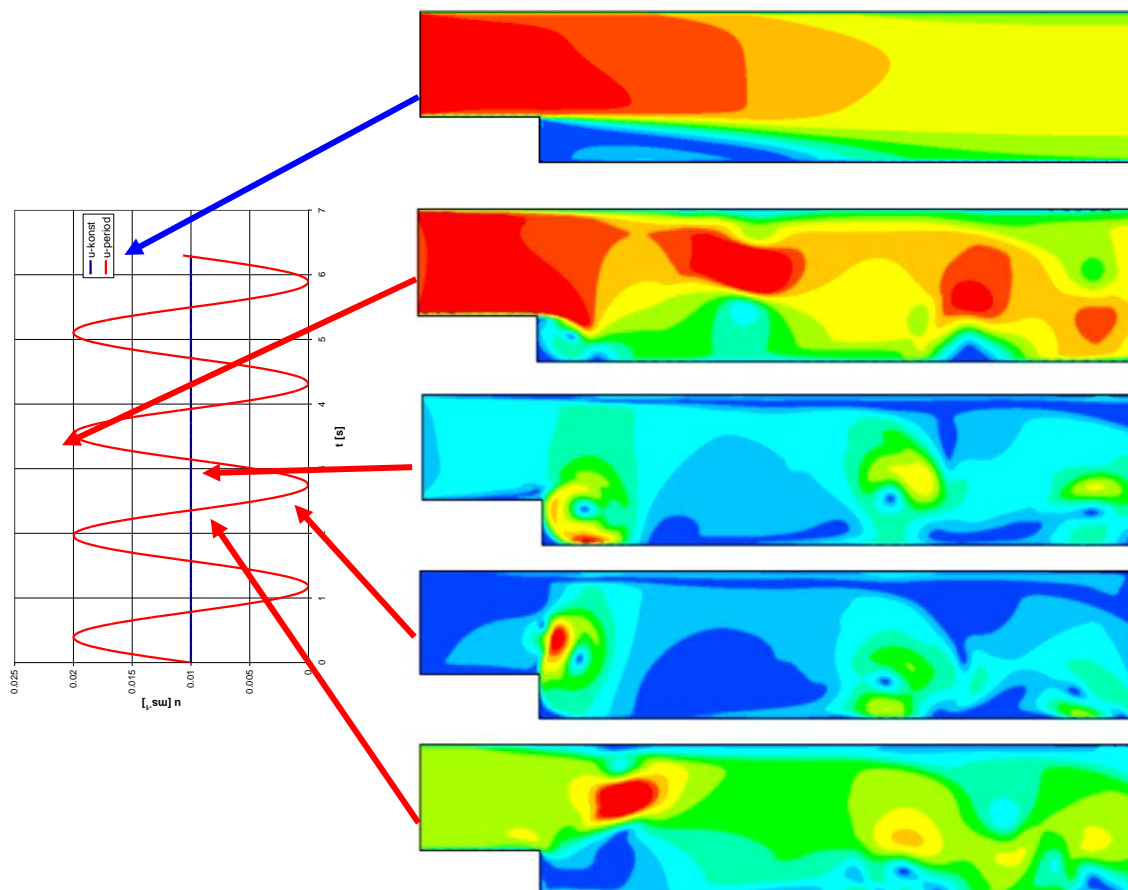
	Statická teplota [K]	statický tlak [Pa]
vstup-okoli-vzduch	283.136	38.237
vstup-vnitrek-voda	313.150	1.869
vstup-vnitrek-vzduch	283.148	0.4817
vystup-okoli-vzduch	295.591	0
vystup-vnitrek-voda	305.820	0
vystup-vnitrek-vzduch	301.552	0

9. Časově závislé řešení

Obecně je průtok kolem prostorových prvků typický tím, že se objevuje separace proudu nebo vírová cesta, což jsou časově závislé struktury. Průtok je také závislý na čase. Numerické řešení takových proudění jak v laminárním, tak v turbulentním režimu je také závislé na čase. Pokud má úloha časově závislý charakter proudění generovaný především vytvořením sekundárního proudění (vírové cesty) při obtékání těles, viz obr. 9.1, nebo jako odezva na časově závislé okrajové podmínky, viz obr. 9.2, pak je nutné podstoupit složitější a časově náročnější řešení, které je funkcí času. Samozřejmě časová závislost se promítá do jevů přenosu tepla a chemických reakcí.



obr. 9.1 Vznik vírové cesty při obtékání válce [18]



obr. 9.2 Průběh rychlosti jako odezva na konstantní a sinusovou rychlost na vstupu zleva do oblasti (periodická okrajová podmínka vyvolá periodické proudění v celé oblasti)

9.1. Diskretizace časově závislé rovnice

V případě časově závislého proudění se předpokládá výchozí bilanční rovnice (pro jednoduchost jednorozměrný tvar) pro obecnou proměnnou veličinu ζ ve tvaru

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\zeta) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha_\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] + S_\zeta \quad (9.1.1)$$

v integrální formě je ve tvaru

$$\int_V \frac{\partial \zeta}{\partial t} dV + \int_A (u\zeta) dA = \int_A \left[\alpha_\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] dA + \int_V S_\zeta dV \quad (9.1.2)$$

Výchozí rovnice musí být diskretizována v čase i prostoru. Prostorová diskretizace pro časově závislé rovnice je shodná se stacionární úlohou. Časová diskretizace zahrnuje integraci každého členu diferenciální rovnice s časovým krokem Δt . Integrace časových výrazů je jednoduchá, jak bude uvedeno dále.

Výše uvedená rovnice se zapíše v obecné podobě

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = F(\zeta) \quad (9.1.3)$$

kde funkce F obsahuje prostorovou diskretizaci. Pokud se na časovou derivaci použije diferenční aproximace prvního řádu vpřed, pak je diskretizovaná rovnice daná jako

$$\frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n}{\Delta t} = F(\zeta) \quad (9.1.4)$$

a případně diskretizace druhého řádu přesnosti je

$$\frac{3\zeta^{n+1} - 4\zeta^n + \zeta^{n-1}}{\Delta t} = F(\zeta) \quad (9.1.5)$$

kde ζ obecná skalární veličina

$n+1$ hodnota v následujícím čase $t + \Delta t$

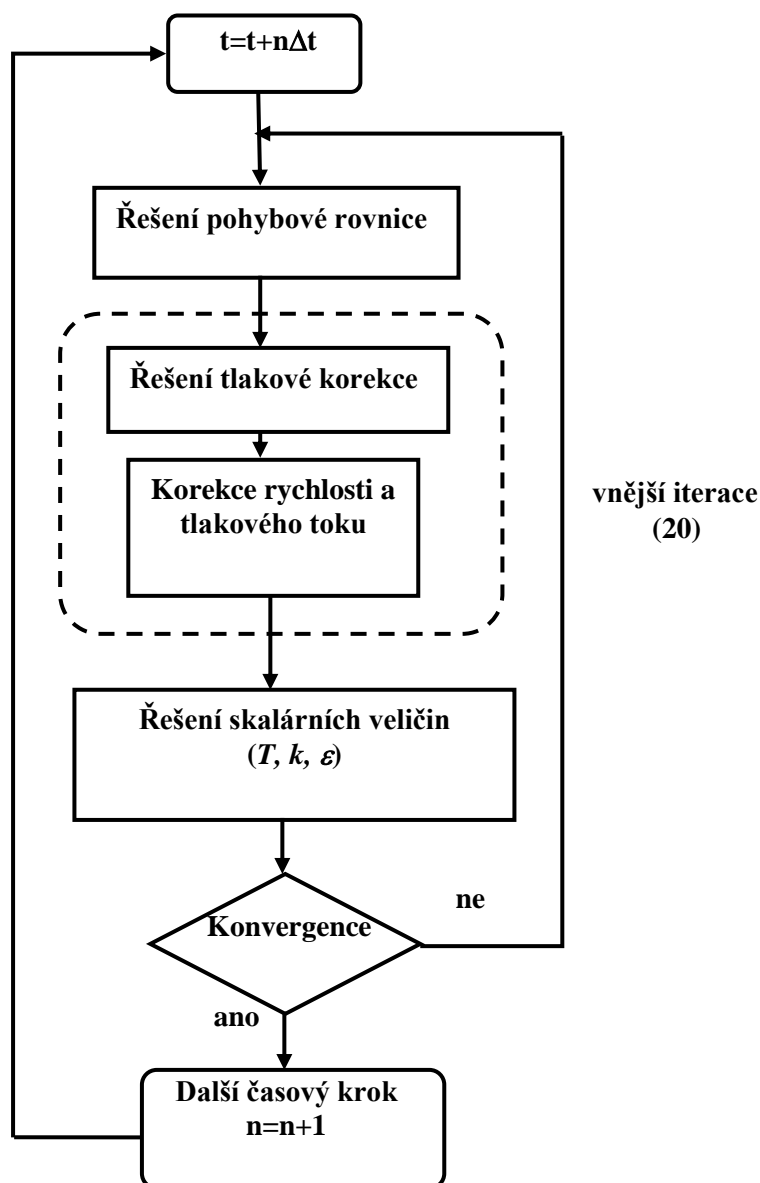
n hodnota v čase t

$n-1$ hodnota v předešlém čase $t - \Delta t$

Časová diskretizace výchozí rovnice (9.1.2) předpokládá implicitní přístup, tedy konvektivní, difúzní a zdrojový člen jsou vyhodnoceny v čase $t + \Delta t$.

$$\int_V \frac{\partial \zeta}{\partial t} dV + \int_S \zeta^{n+1} u^{n+1} dS = \int_S \alpha_\zeta \frac{\partial \zeta^{n+1}}{\partial x} dS + \int_V S_\zeta^{n+1} dV \quad (9.1.6)$$

V iteračním schématu jsou všechny rovnice řešeny iteračně pro daný časový krok, až je dosažena konvergence. Tedy řešení v každém časovém kroku požaduje určitý počet vnějších iterací, dokud nezkonverguje v každém časovém kroku (odpovídá zkonvergování stacionární úlohy v každém časovém kroku).



obr. 9.3 Schéma řešení při použití segregace řešiče.

Volba časového kroku je problematická. Pokud je časová závislost způsobena známou okrajovou podmínkou, pak je možné přibližně odhadnout časový krok. V opačném

případě je časová závislost způsobena např. odtrhávajícími se víry za ostrou hranou, pak je nutné velikost časového kroku testovat na počátku výpočtu a splnit následující požadavky:

- ideální doporučený počet vnějších iterací v každém časovém kroku je 10-20
- větší počet iterací znamená velký časový krok
- menší počet iterací znamená malý časový krok
- počátek výpočtu realizovat pro relativně malý časový krok Δt a v průběhu výpočtu postupně zvyšovat.

Vyhodnocování výpočtu s časově závislým krokem je možné při automatickém ukládání datových souborů příkazem FILE-WRITE-AUTO-SAVE. Jde o pravidelné ukládání výsledků řešení po určitém počtu časových kroků během výpočtu. Jiná možnost je ukládat hodnoty vybraných proměnných v určitém místě oblasti během průběhu časově závislého řešení a tak sledovat jejich změny v čase a posoudit, zda se např. řešení blíží ustálenému stavu při sledování rozběhu systému do ustáleného stavu. Nejdříve se vytvoří tzv. monitorovací body v nabídce SURFACE-POINT zadáním přesných souřadnic sledovaného bodu nebo odhadem myší. V příkazu SOLVE-MONITORS-SURFACE INTEGRALS je pak možno vybrat daný bod a vyhodnocovanou proměnou. Záznam v závislosti na čase lze zaznamenávat v souboru a zároveň kreslit do grafu na monitor.

Samozřejmě optimální vyhodnocení je animací, vytvořenou přímo softwarově během výpočtu.

9.2. Okrajové podmínky

Časově závislé okrajové podmínky se mohou zadávat dvěma způsoby:

- pomocí souboru (tabulky) pro definici profilu
- UDF (User Defined Function) - funkce se definuje pomocí C jazyka, uloží, zkompiluje, přiřadí v okrajových podmínkách pomocí souboru (tabulky) pro definici profilu

9.2.1. Tabulka pro časovou okrajovou podmínku

Tabulka se vytvoří v textovém editoru s příponou TXT. Format takové tabulky je následující:

```
profile-name n_field n_data periodic?
field-name-1 field-name-2 field-name-3 .... field-name-n_field
v-1-1 v-2-1 ... .. v-n_field-1
v-1-2 v-2-2 ... .. v-n_field-2
...
v-1-n_data v-2-n_data ... .. v-n_field-n_data
```

kde	profile-name	souhrnný název všech proměnných
	n-field	počet proměnných
	n-data	počet dat charakterizujících funkční závislost (počet řádků v tabulce)
	periodic?	roven 1 pro periodickou podmínku, roven 0 pro neperiodickou podmínku
	field-name-1	je výhradně použito pro vektor času (time), jehož hodnoty musí narůstat
	field-name-i	vektory dalších proměnných, závislých na čase
	v-1-1 ... v-n_field-n_data	položky v matici, jejíž sloupce odpovídají časové závislosti vektorů proměnných

Definujte soubor pro tabelovanou závislost rychlosti na čase

Tabulka vstupních hodnot		Zadání tabulky vstupních hodnot pro Fluent
		sampletabprofile 2 3 0
<i>time</i>	<i>u</i>	time u
1	10	1 10
2	20	2 20
3	30	3 30

Definujte soubor pro tabelovanou periodickou závislost rychlosti na čase. Proměnná periodicity se nastaví 1. n_data definuje počet dat charakterizujících jednu periodu.

Tabulka vstupních hodnot		Zadání tabulky vstupních hodnot pro Fluent
		sampletabprofile 2 4 1
<i>time</i>	<i>u</i>	time u
0	10	0 10
1	20	1 20
2	30	2 30
3	10	3 10

Všechny veličiny se musejí zadat v jednotkách soustavy SI (při čtení profilu se neprovádí konverze dat a je nutno použít jen malá písmena pro označení proměnných. Profil se přečte z textového menu následujícími příkazy:

```
FILE-READ TRANSIENT TABLE
```

Je možno požit zkratky (f-rtt). Zadá se jméno souboru i s příponou, na obrazovce se objeví informace o přečtení souboru. Profil se pak zadá do okrajové podmínky příkazy

```
DEFINE-BOUNDARY CONDITIONS
```

9.2.2. UDF pro okrajovou podmínku

Okrajové podmínky závislé na čase se mohou definovat procedurou v C-jazyku. Proměnné mají přesně definované označení, které je nutné najít v manuálu, tam jsou také jednoduché příklady.

Nadefinujte x-ovou složku rychlosti na vstupu pomocí sinové funkce času

$$u_x(t) = u_0 + A \sin(\omega t):$$

```

/*****
unsteady.c
UDF for specifying a transient velocity profile boundary condition
*****/

#include "udf.h"

DEFINE_PROFILE(unsteady_velocity, thread, position)
{
    face_t f;
    real t = CURRENT_TIME;

    begin_f_loop(f, thread)
    {
        F_PROFILE(f, thread, position) = 10. + sin(7.*t);
    }
    end_f_loop(f, thread)
}

```

Soubor se vytvoří jako soubor *.txt a uloží s příponou C. Zkompiluje se interaktivním způsobem pomocí příkazů DEFINE-UDF-ITERPRETED-COMPILE. Pak se připojí v okrajových podmínkách pro danou vstupní hranici.

9.3. Vyhodnocení časově závislé úlohy

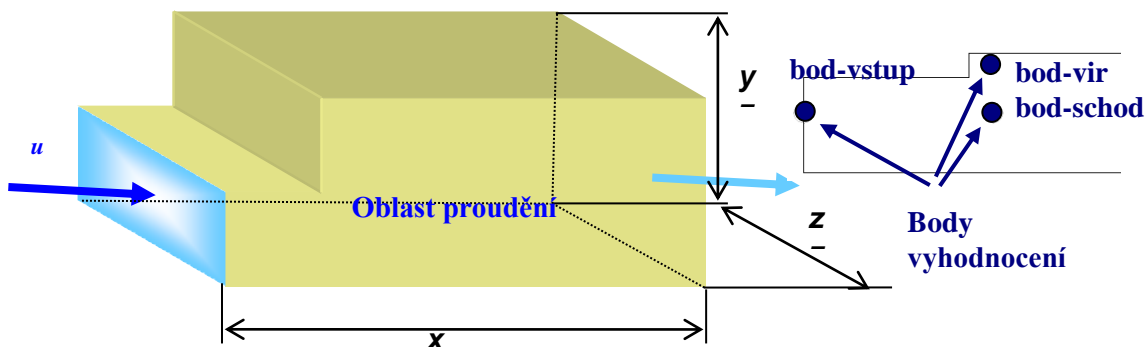
Časově závislá úloha ve srovnání s časově nezávislou (stacionární úlohou) je mnohem složitější, neboť v každém časovém kroku dochází ke změně proudového pole a tedy všech sledovaných veličin.

Nejdokonalejší obraz řešení umožňuje animace např. vektoru rychlostí, tlaku a dalších veličin. To je ale velmi náročné z hlediska hardwarového. Navíc prezentování výsledku vyžaduje počítač, tedy nehodí se do textových zpráv. Je-li opravdu nutné prezentovat časovou závislost v textu, je možno vytvořit sérii obrázků tak, že se uloží datové soubory v předem definovaných časových krocích, pak se vytvoří grafické prezentace a vloží jako obrázky do textového souboru, viz obr. 9.2.

Z důvodu časové a hardwarové náročnosti se využívá jednodušších prostředků k vyhodnocení, jako je graf závislosti určité veličiny v předem definovaném bodě, nebo vyhodnocení střední hodnoty veličiny na ploše.

Příklad vyhodnocení proudění za schodem

Řešte proudění v oblasti, kde na vstupu je dána rychlost, která se periodicky mění dle funkční závislosti rychlosti na čase. Vyhodnoťte rychlost a tlak ve vybraných bodech.



obr. 9.4 Schéma řešené oblasti

Geometrie oblasti:

délka oblasti x [m]	3.5
výška oblasti y [m]	0.5
šířka oblasti z [m]	1.5

Fyzikální vlastnosti:

	Vzduch
Hustota ρ [kgm ⁻³]	1.225
Dynamická viskozita η [kg(ms) ⁻¹]	1.7894e-05

Okrajové podmínky:

Vstup	rychlost u [ms ⁻¹]	$2 + \sin(7t)$
	střední rychlost u_s [ms ⁻¹]	2
	intenzita turbulence I [%]	2
	hydraulický průměr d_h [m]	0.4

Matematický model:

Reynoldsovo číslo $Re = 235\,294 \Rightarrow$ proudění je turbulentní

Výsledky:

Je nutno nadefinovat body, ve kterých se provede grafický i textový záznam průběhu rychlosti a tlaku. Příkazy

Definice bodu: SURFACE-POINT zadání souřadnic a název BOD-VSTUP
BOD-SCHOD
BOD-VIR

Definice záznamu: SOLVE-MONITOR-SURFACE jméno, plot, write time step, define
DEFINE-AREA WEIGHTED AVERAGE-FLOW TIME-PRESSURE
výběr bodu BOD-VSTUP

SOLVE-MONITOR-SURFACE jméno, plot, write time step, define
DEFINE-AREA WEIGHTED AVERAGE-FLOW TIME-VELOCITY
výběr bodu BOD-SCHOD

SOLVE-MONITOR-SURFACE jméno, plot, write time step, define
DEFINE-AREA WEIGHTED AVERAGE-FLOW TIME-VELOCITY
výběr bodu BOD-VIR

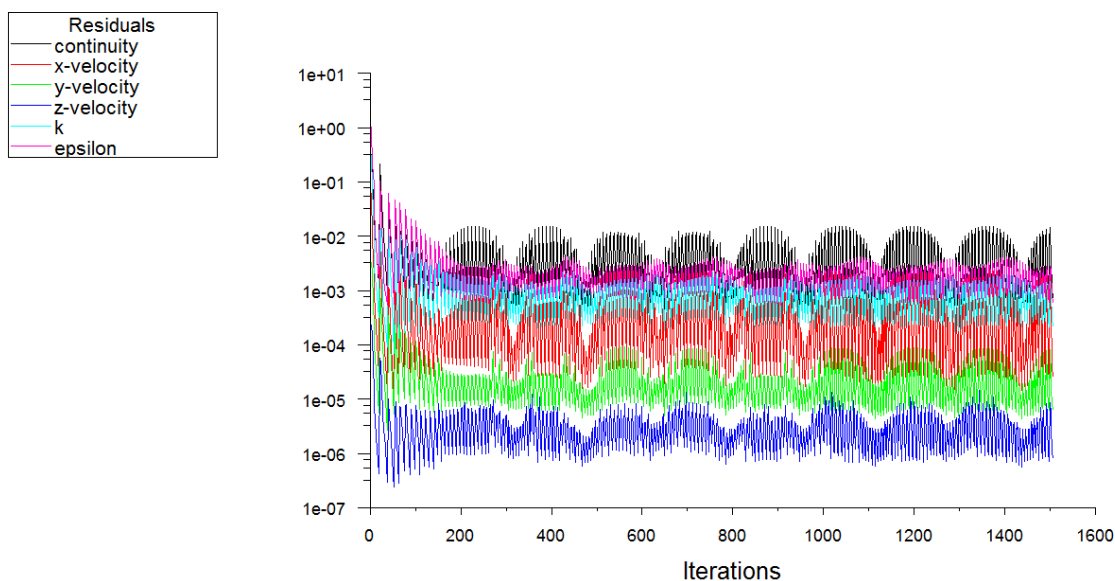
Určí se perioda v závislosti na vstupní rychlosti

$$\omega = 2\pi f = 7 \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{7}{2 \cdot 3.14} = 1.115 \Rightarrow T = 0.897$$

Spustí se časově závislý výpočet, odhadne se časový krok (menší než desetina periody)

$$\Delta t = 0.02 \text{ s}$$

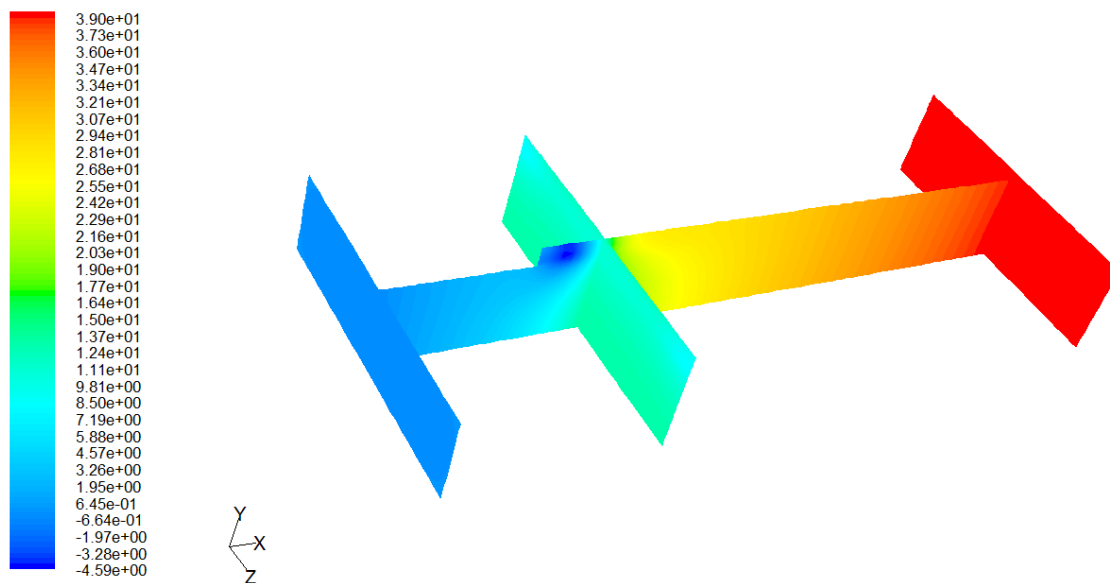
Při výpočtu se kontroluje, zda je počet vnitřních iterací menší než 20, jinak se časový krok bude korigovat. Výsledek výpočtu se zapisuje do souborů BOD-VSTUP.OUT, BOD-SCHOD.OUT A BOD-VIR.OUT. Soubory jsou textové a přečtou se do EXCELU a připraví se grafy. Na záznamu reziduálů je vidět periodičnost děje kromě prvních několika iterací, které jsou ovlivněny tím, že výpočet začíná od počáteční aproximace, která je dána nulovými hodnotami proměnných, viz obr. 9.5



Scaled Residuals (Time=4.0000e+00)

Sep 10, 2008
FLUENT 6.3 (3d, dp, pbns, ske, unsteady)

obr. 9.5 Reziduály periodického řešení

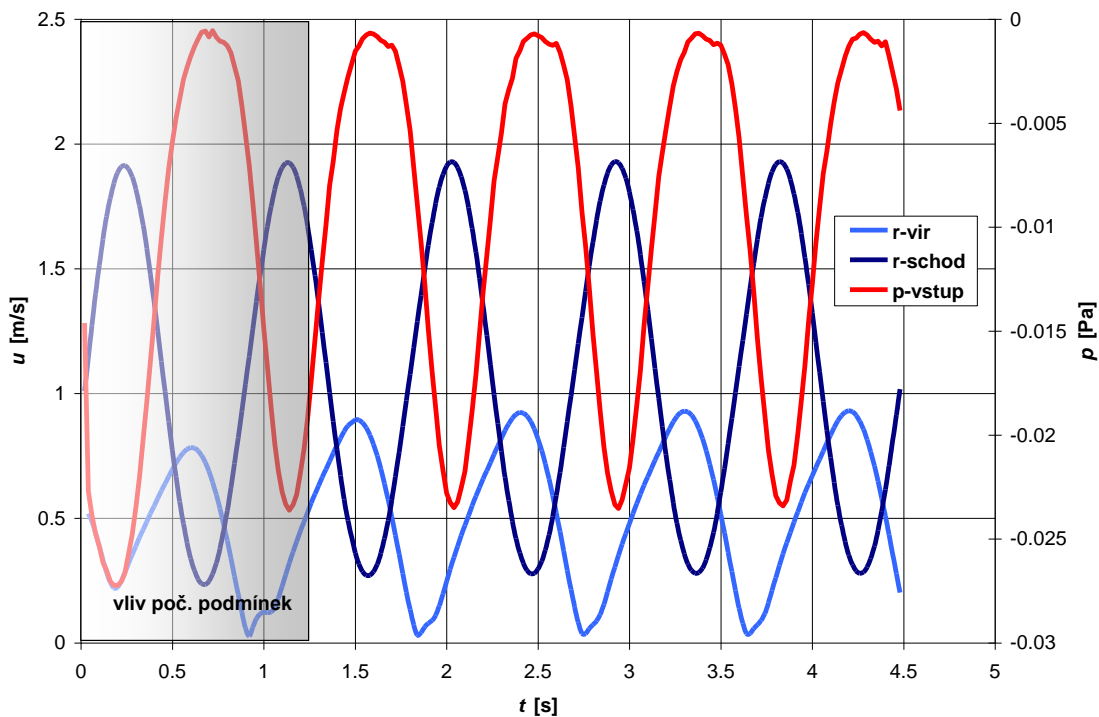


Contours of Static Pressure (pascal) (Time=4.0000e+00)

Sep 10, 2008
FLUENT 6.3 (3d, dp, pbns, ske, unsteady)

obr. 9.6 Okamžité hodnoty tlaku

Hodnoty rychlosti na vstupu, v bodě BOD-SCHOD a tlaku v bodě BOD-VSTUP jsou vyhodnoceny a zobrazeny v EXCELu, viz obr. 9.7.



obr. 9.7 Vyhodnocení rychlosti a tlaku v bodě v závislosti na čase

Na obr. 9.7 je patrný periodický průběh rychlostí a tlaku, jejichž perioda je shodná s periodou vstupní rychlosti určené dříve. Perioda je na počátku deformovaná tím, že výpočet začíná s nulovými počátečními podmínkami uvnitř proudového pole. Po přibližně 1 s je amplituda všech zobrazovaných funkcí již konstantní.

10. Optimalizace (adjungovaný řešič)

Myšlenka adjungovanosti se objevuje všude v moderní a klasické matematice. Datuje se do 18. století. Teprve nedávno se ukázala jako silný prostředek pro rozšíření inženýrské analýzy při použití CFD metod. Adjungovaný řešič poskytuje specifické informace o fluidním systému, které je velmi obtížné získat jiným způsobem. Může být použit k výpočtu derivací inženýrské veličin s ohledem na všechny vstupy do systému. Příkladem je

- Derivace odporu s ohledem na tvar vozidla.
- Derivace celkového tlakového spádu s ohledem na tvar dráhy proudění.

Adjungovaný řešič je specializovaný nástroj, který rozšiřuje analýzu uvedenou v standardním (konvenčním) řešiči proudění a poskytuje podrobné údaje o citlivosti systému tekutiny. Aby bylo možné provést simulaci pomocí standardního řešiče proudění ANSYS, uživatel doplní geometrii výpočtovou sítí, určuje vlastnosti materiálů a fyzikální modely, konfiguruje okrajové podmínky různých typů. Jakmile standardní řešič proudění zkonverguje, poskytne podrobný soubor dat, který popisuje stav proudění. Je-li provedena změna některého z údajů, který definuje problém, pak se výsledky výpočtu mohou změnit. Míra změny závisí na tom, jak citlivé je proudění na konkrétní upravovaný parametr. Ve skutečnosti derivace výsledku řešení podle tohoto upravovaného parametru kvantifikuje citlivost prvního řádu. Určení derivací je podstatou citlivostní analýzy.

Způsob výpočtu adjungovaného řešení se podobá výpočtu standardního proudění v mnoha ohledech. Jeden hlavní rozdíl je, že pozorování skalární hodnoty je zvoleno před zahájením adjungovaného výpočtu. Jakmile adjungované řešení zkonverguje, je k dispozici derivace sledované veličiny vzhledem k pozici každého bodu na povrchu geometrie a lze nalézt citlivost sledované veličiny pro konkrétní nastavení okrajové podmínky. Tento pozoruhodný rys adjungovaného řešení je znám již stovky let, ale teprve v posledních 25 letech má význam pro výpočetní fyziku.

10.1. Použití modulu adjungovaného řešiče

Tato kapitola popisuje postup pro práci s adjungovaným řešičem, stejně jako nastavení, spuštění a post-procesing adjungovaného řešení. Kapitola také demonstrovuje proces modifikace tvaru, která se řídí podle adjungovaného řešení. Typické použití tohoto adjungovaného řešiče zahrnuje následující kroky:

- Výpočet proudění klasickým způsobem.
- Spuštění modulu adjungovaného řešiče

- Pochopení rozsahu funkčnosti
- Definování sledovaných proměnných
- Nastavení ovládacích prvků adjungovaného řešiče.
- Nastavení monitorů a konvergenčního kritéria adjungovaného řešiče.
- Inicializace adjungovaného řešení a iterovat až ke konvergenci.
- Spuštění adjungovaného kalkulátoru
- Post-processing adjungovaného řešení
- Změna tvaru hranice na základě dat citlivosti tvaru a výpočet proudění v nové geometrii

10.2. Omezení použití adjungovaného řešiče

Adjungovaný řešič je metoda, která má určité omezení a je realizována na následujícím základě:

- Stav proudění je definován jako trvale nestlačitelné jednofázové proudění, které je buď laminární nebo turbulentní ležící v inerciální vztažné soustavě.
- Základní proudění je nutno řešit pro takové okrajové podmínky, aby úloha dobře a rychle konvergovala (tj. aby nebyla silně turbulentní, aby nevznikaly vírové cesty z důvodu obtékání překážek, aby byl v zájmové oblasti dostatečný tlakový spád) protože pak bude dobře konvergovat adjungovaný řešič.
- Pro turbulentní proudění je použit předpoklad zmrazené turbulence, ve kterém se vliv změn stavu turbulence nebude brát v úvahu při výpočtu citlivosti.
- U turbulentního proudění jsou standardní stěnové funkce použity na všech stěnách.
- Adjungovaný řešič využívá metod, které jsou ve výchozím nastavení prvního řádu přesnosti v prostoru. Pokud chcete, můžete vybrat metody druhého řádu přesnosti (viz Používání Adjungované řešení metody).
- Okrajové podmínky jsou pouze následujícího typu
 - stěna
 - vstupní rychlost
 - výstupní tlak
 - symetrie

- rotační a translační periodické podmínky

Je důležité si uvědomit, že tyto požadavky nejsou omezením pro běžný řešič proudění, ale jsou omezením pro adjungovaný řešič. Pro úlohy z oblasti hydrauliky a pneumatiky (tj. proudění v uzavřených oblastech) je vhodné využít části řešiče, týkající se optimalizace tlakového spádu, zatímco pro úlohy obtékání těles se vyhodnocují odporové a tlakové síly. Také kombinace sledovaných parametrů je velmi ilustrativní.

Automatizace:

U úloh, které dobře konvergují, je možné připravit automatizaci výpočtu a tím usnadnit práci s adjungovaným solverem. V úlohách s komplikovanou geometrií, které špatně konvergují v základním řešiči, se dá předpokládat problematická konvergence i při použití adjungovaného řešiče. Důvodem je, že se řeší linearizované Navierovy Stokesovy rovnice (které jsou ve své podstatě nelineárním systémem parciálních diferenciálních rovnic). Postup pro automatizaci je následující:

- Každý z příkazů v grafickém okně (GUI) má i textový tvar (TUI).
- Menu textových příkazů vyvoláme stisknutím klávesy enter v příkazové řádce okna FLUENT.
- Parametry jednotlivých TUI příkazů je možné zjistit jejich spuštěním v grafickém okně.
- TUI příkazy lze zapsat do jednoho textového souboru (journal), pomocí kterého je následně možné použít posloupnost příkazů ve FLUENTU bez nutnosti interaktivního uživatelského zásahu.
- Textový journal načteme ve FLUENTU textovým příkazem (možné i přes grafické menu):

/file/read-journal „název souboru“

- Nastavení solveru, které provedeme v grafickém rozhraní před uložením úlohy (case) a které bude během dalších výpočtu neměnné, není potřeba v journalu opakovat (např. nastavení turbulentního modelu, okrajových podmínek).

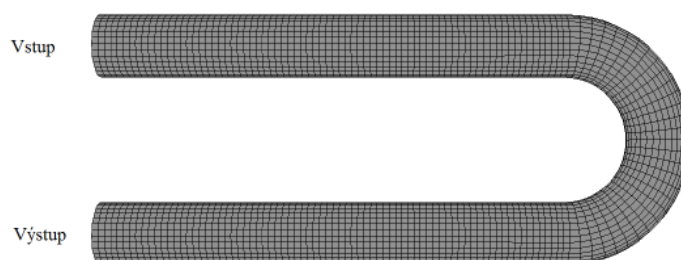
10.3. Aplikace

10.3.1. Snížení tlakové ztráty 180° kolena

Cílem úlohy je pomocí nástroje Adjoint solver snížit tlakovou ztrátu ve 180° potrubním kolenu a dosáhnout vyšší rovnoměrnosti profilu na výstupu [25]. Problém je řešený jako prostorový, viz obr. 10.1. Proudění se předpokládá stacionární, isotermní, turbulentní ($k-\epsilon$ model, scalable wall functions). Proudící médium je vzduch. Fyzikální vlastnosti vzduchu jsou uvedeny v Tab. 10.1.

Tab. 10.1– Rozměry a fyzikální vlastnosti

Průměr potrubí (mm)	20
Viskozita μ (kg/m.s)	$1,789 \cdot 10^{-5}$
Hustota ρ (kg/m ³)	1,225

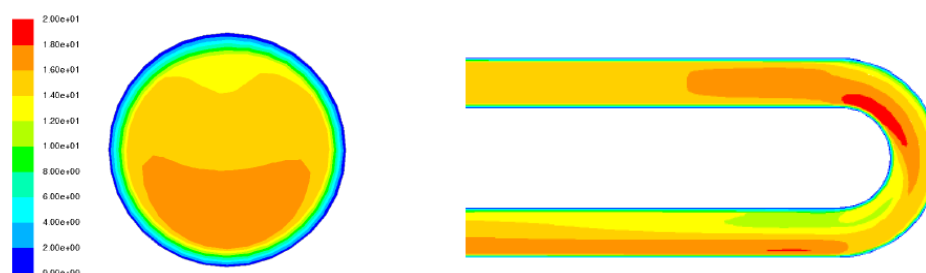
**obr. 10.1 Model kolena a síť**

Výpočetní síť má 43680 hexahedrálních buněk, okrajové podmínky jsou jednoduché a jsou definovány jako Wall, Vstup – Velocity inlet – 15 m/s, Výstup – Pressure outlet – 0 Pa.

Nastavení řešiče je následující:

- Solver Coupled solver.
- Gradientní schéma *Green-Gauss Cell based.*
- Diskretizace *Second Order Upwind.*
- Metoda *Pseudo Transient*
- Podrelaxace.
 - o *Length scale* 0,02 m.
 - o *Timescale factor* 5.
- Použít *High Order Term Relaxation* (all variables 0,75).
- Provést výpočet na 100 iterací.

Vyhodnocení

**obr. 10.2 Vyhodnocení rychlosti na výstupu a v osovém řezu oblastí pomocí kontur**

Pro další úvahy byly vyhodnoceny střední hodnoty tlakové ztráty (tj. tlaku na vstupu) a rychlosti na výstupu:

Tlaková ztráta	107 Pa
Střední hodnota rychlosti na výstupu	15 m/s
Směrodatná odchylka rychlosti na výstupu	1.14 m/s

Postup řešení adjungovaným solverem:

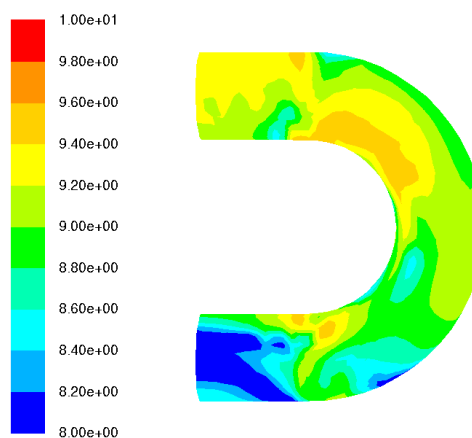
- V adjungovaném solveru lze minimalizovat tlakovou ztrátu mezi kontrolními body (plochami) v oblasti (mezi vstupem a výstupem - $\Delta p_0=90$ Pa)
- Pro dosažení rovnoměrného rychlostního profilu na výstupu je cílová funkce doplněna o směrodatnou odchylku rychlosti na výstupu z domény a je stanovena z hodnot celkového tlaku na výstupu z oblasti
- Definice cílové funkce jako kombinace tlakové ztráty a směrodatné odchylky rychlosti na výstupu v jedné rovnici:

$$funkce = |dp_{vstup} - dp_{výstup}| + \sqrt{\text{var}(p_{tot-výstup})}$$

Nastavení adjungovaného řešiče:

- Vypnout kontrolu konvergence – Check convergence,
- Provést následující nastavení v menu Adjoint Solution Controls:

Courant Number	2,
Artificial Compressibility	0,05,
Flow Rate Courant Scaling	2,
Under-Relaxation Factors	0,6,
Provést výpočet	300 iterací.



obr. 10.3 Citlivost geometrie

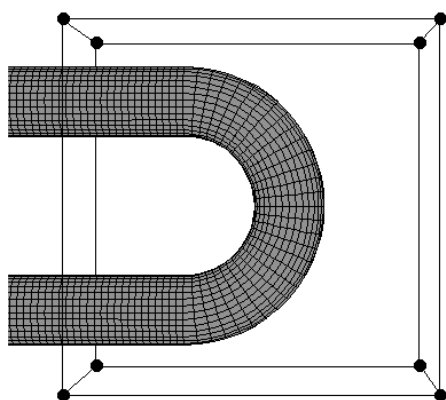
Vyhodnocení citlivosti a úprava geometrie (morphing):

Citlivostní mapa je na obr. 10.3. Zobrazuje místa geometrie, kde je tlaková ztráta a velikost směrodatné odchylky citlivá na tvar potrubí. Citlivostní mapu zobrazíme konturami $\log_{10}(\text{Shape Sensitivity Magnitude})$.

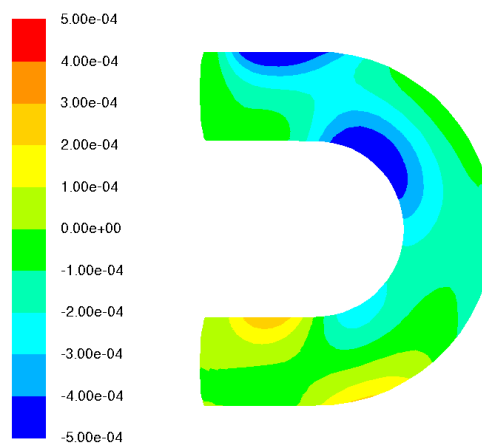
Morphing:

- Do morphovacích oblastí uzavřeme pouze potrubní koleno – obr. 10.4.
- Pro úpravu geometrie zvolíme *Scale Factor* 2,5.

- Předpokládanou změnu sledované funkce vyhodnotíme stisknutím *Expected Change*.
- Kontury optimálních posuvů geometrie *Normal Optimal Displacement* jsou zobrazeny na obr. 10.5
- Úpravu geometrie provedeme stisknutím *Modify Mesh*.
- Před potvrzením úpravy (*Accept*) si lze upravenou geometrii prohlédnout a případně změnu vrátit zpět (*Revert*).



obr. 10.4 Oblast morphingu



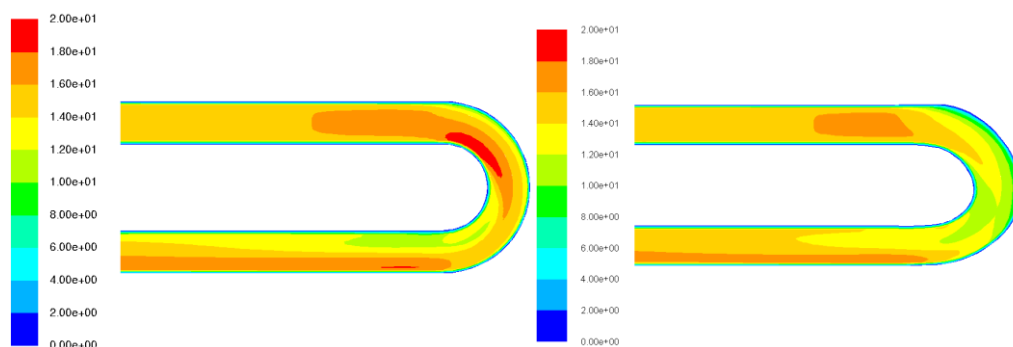
obr. 10.5 Kontury Normal Optimal Displacement

Vyhodnocení výpočtu:

Vliv tvarové změny se zkontroluje přepočtem primárního proudového pole. V tabulce je vyhodnocení změn sledovaných veličin proti výchozímu stavu. Opakováním výpočtu adjungovaným řešičem a úpravou geometrie se iteračně přibližujeme optimálnímu tvaru potrubního kolena. Výsledky po šesti iteračních smyčkách jsou uvedeny v Tab. 10.2.

Tab. 10.2

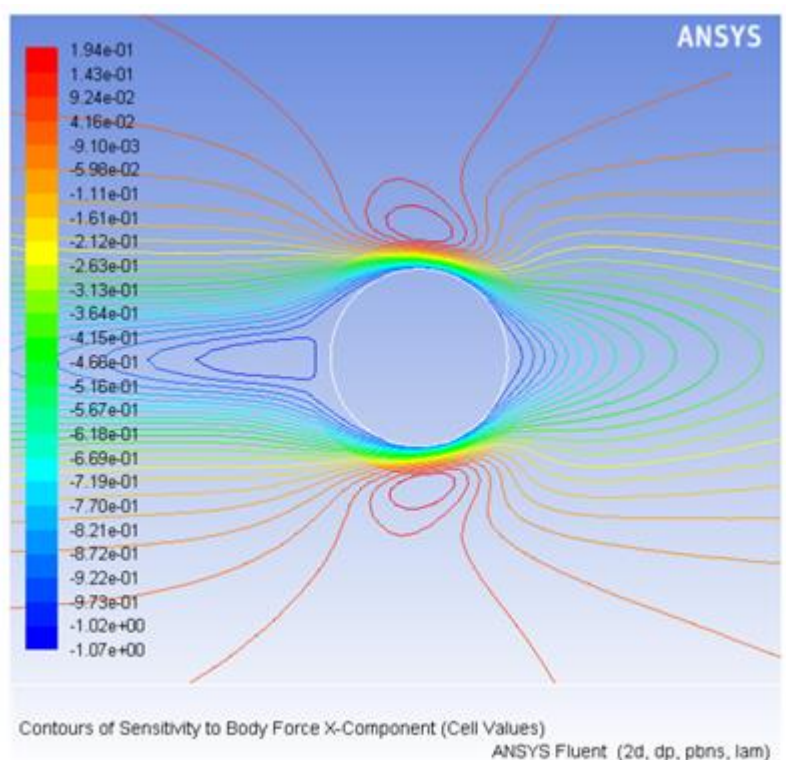
	Počáteční hodnoty	Hodnoty po 6. iteraci
Tlaková ztráta	107 Pa	89 Pa
Střední hodnota rychlosti na výstupu	15 m/s	15 m/s
Směrodatná odchylka rychlosti na výstupu	1.14 m/s	1.03 m/s



obr. 10.6 Rychlost v doměně [m/s] (vlevo výchozí stav, vpravo optimalizovaný).

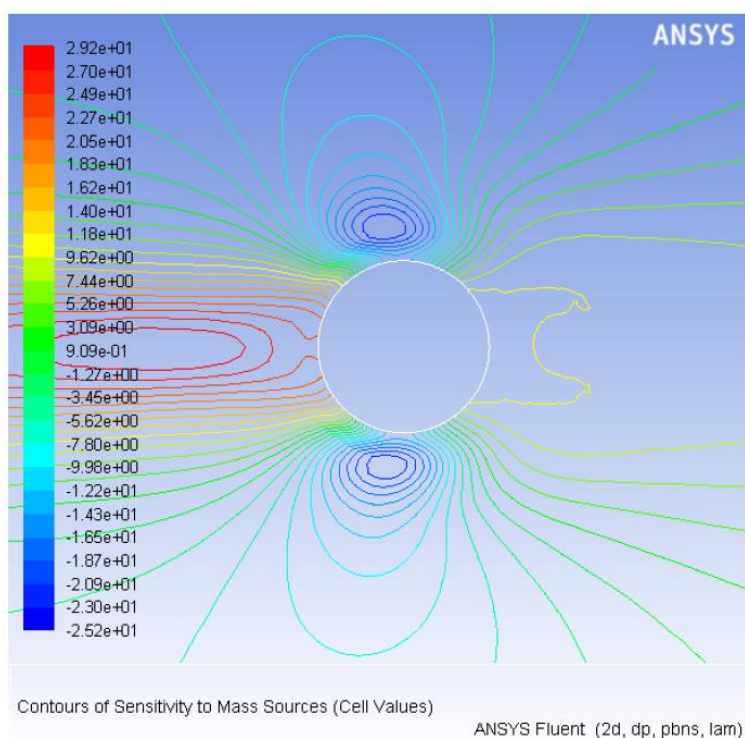
10.3.2. Aplikace na obtékání válce

Adjungovaný řešič byl použit pro výpočet citlivosti odporu na kruhovém válci k různým vstupům pro dříve vypočítané proudové pole. Proces nastavení a spuštění adjungovaného řešiče je ilustrativně popsán v následujícím textu. Budou také popsány kroky, jak provádět různé formy post-processingu. Citlivost odporu vzhledem k tvaru válce je vyhodnocena v kombinaci s mesh-morphing, aby se následně provedla změna jeho konstrukce, která snižuje odpor předvídatelným způsobem. Kromě toho je zaveden poměr lift/drag jako sledovaná proměnná a byl analyzován. Výsledkem je, jak může být deformace geometrie použita k optimalizaci návrhu s ohledem na větší zatížení.



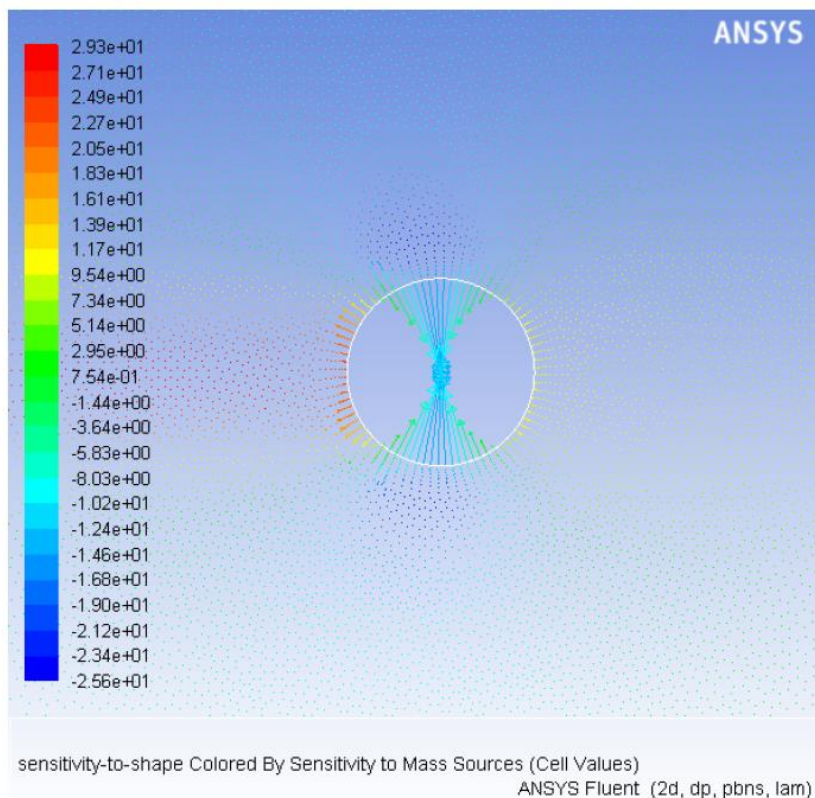
obr. 10.7 Adjungovaná citlivost na objemovou sílu ve směru x-ové osy

Obrázek ukazuje citlivost odporu válce vzhledem k objemové síle ve směru x-ové osy proudění. Účinek objemové síly po proudu je minimální, což se očekávalo. Je-li objemová síla aplikována v příčném směru k proudu, pak dopadající proudění na válec modifikuje sílu významně.



obr. 10.8 Adjungovaná citlivost na hodnotu hmotnostního zdroje

Ukazuje se, že odpor (Drag) válce je ovlivněn přidáním zdrojů a propadů hmoty (změny tlaku). Je-li tlak systematicky snížen v y-směru proudění, pak se odpor sníží. To lze zdůvodnit tak, že adjungovaný tlak je negativní y-směru proudění od válce. Naproti tomu, jestliže je tlak zvýšen v x-směru proudění, pak odpor narůstá. To je indikováno kladnými hodnotami adjungovaného tlaku. Takové chování se očekává, že protože odebrání materiálu (snížení tlaku) na válci ve svislém směru urychlí proudění vzduchu kolem stěny válce, čímž se zvyšuje lokální třecí odpor.



obr. 10.9 Tvarová citlivost obarvená citlivostí vůči hmotnostnímu zdroji

Na obr. 10.9 se ukazuje, jak citlivý je odpor na změny ve tvaru povrchu. Odpor je ovlivněn výrazněji v případě, že válec je deformován v příčném směru proudění než na straně po proudu. Maximálního účinku je dosaženo tím, že se válec zužuje v příčném směru k proudu.

11. Vícefázové proudění

11.1. Specifikace vícefázových materiálů

Velké množství proudění, která se vyskytují v přírodě a v různých průmyslových technologiích, je směs fází. Fyzikální fáze jsou plyny, kapaliny a pevné látky, ale v širším smyslu se používá koncepce fáze v multifázovém systému proudění. Při multifázovém proudění může být fáze definována jako identifikovatelná třída materiálu, která má konkrétní inerciální odezvu v interakci s průtokem a potenciálním polem. Například pevné částice různé velikosti stejného materiálu se mohou uvažovat jako různé fáze, protože každá skupina částic o stejné velikosti bude mít podobnou dynamickou odezvu v proudění.

Režimy vícefázového proudění se dělí do čtyř kategorií dle stýkajících se fází:

- **proudění fáze plyn – kapalina nebo kapalina – kapalina**
 - proudění bublin – proudění diskretních plynných nebo kapalných bublin v primární fázi (kavitace)
 - kapky – diskretní kapalně kapky v primární fázi (pohlcující materiál, rozprašovač, sušič)
 - velké bubliny v primární fázi (bubliny v nádrži)
- **proudění plyn – pevná látka**
 - transport částic v potrubí
 - pevné částice ve vertikální nádrži nadnášené plynem
- **proudění kapalina – kapalina**
 - sedimentace
- **třífázové proudění** – kombinace předešlých variant

Pro modelování vícefázového proudění existují dva přístupy:

Euler-Lagrangeův přístup – vychází z něj model diskretních fází. Zde je tekutá fáze uvažována jako kontinuum a je řešena Navierovými-Stokesovými rovnicemi, zatímco dispergovaná fáze je řešena stopováním velkého počtu částic, bublin nebo kapek v proudovém poli. Základním předpokladem je, že dispergovaná fáze zaujímá malý objemový zlomek, ačkoli pro hmotnost, resp. hmotnostní průtok to platit nemusí. Dispergované fáze může ovlivnit hybnost, hmotnost a energii fluidní fáze. Základním předpokladem tohoto modelu je to, že druhá dispergovaná fáze zaujímá malý objemový zlomek, ačkoliv může být vysoký hmotnostní průtok částic proti hmotnostnímu průtoku spojitě fáze. Trajektorie částic nebo kapiček jsou vypočítávány individuálně ve stanovených intervalech během výpočtu fluidní fáze. Používá se pro modelování proudění částic ve

sprejích, sušičkách, spalování uhelných a kapalných paliv, ale není vhodný pro modelování směsí kapalina-kapalina, fluidních ložích, nebo jakékoli aplikace, kde objemový podíl druhé fáze nelze opomenout.

Euler-Eulerův přístup – v eulerovsko-eulerovském přístupu jsou různé fáze definovány matematicky jako prostupující se kontinua. Protože objem fáze nemůže být obsazen jinými fázemi, je zaveden koncept objemového zlomku. Tyto objemové zlomky se považují za spojitě funkce v prostoru a čase a jejich součet se rovná jedné. Rovnice zachování pro každou fázi jsou odvozeny za účelem získání souboru rovnic, které mají podobnou strukturu pro všechny fáze. Tyto rovnice jsou uzavřeny poskytnutím konstitutivních vztahů, získaných z empirických informací, nebo v případě granulárních toků aplikací kinetické teorie.

Ve Fluentu jsou k dispozici tři různé modely na bázi Euler-Eulerova přístupu – VOF model, model směsi a Eulerův model a každý je vhodný na jiné aplikace.

- **VOF model** - síť je nepohyblivá. Model je navržen pro dvě nebo více mísitelných tekutin a řeší vzájemné rozhraní mezi nimi. Je vhodný pro stratifikované (vrstvené) proudění a proudění s volnou hladinou. VOF modelem se může řešit proudění dvou a více nesmísitelných kapalin řešením momentové rovnice a sledováním objemového zlomku každé kapaliny v oblasti. Typické aplikace zahrnují předpověď odtržení proudu, pohyb velkých bublin v kapalině, pohyb kapaliny za hrází a ustálené nebo neustálené sledování jakýchkoliv rozhraní kapalina-plyn.
- **Mixture model (model směsi)** - je navržen pro modelování dvou a více fází (tekutin nebo částic). Fáze proniknou do sebe a vznikne jedno kontinuum. Je zjednodušeným vícefázovým modelem, který lze použít k modelování vícefázového toku, kde se jednotlivé fáze posouvají různou rychlostí. Předpokládá se ale lokální rovnováha na krátkém prostorovém délkovém měřítku. Vazba mezi fázemi musí být silná. Toho se může využít také k modelování homogenního vícefázového proudění s velmi silnou vazbou a fázemi pohybujícími se stejnou rychlostí. Model směsi může modelovat n -fází (tekutina nebo částice) řešením momentové rovnice, rovnice kontinuity a rovnice energie pro směsi, rovnice objemového zlomku pro druhou fázi (dispergovanou) a algebraického výrazu pro relativní rychlosti. Aplikace pro použití tohoto modelu jsou např. tyto: bublinkové proudění, sedimentace, proudění částic s malým zatížením, odlučovací cyklona. Mixture model lze definovat s relativní rychlostí dispergované fáze vůči fázi primární, nebo bez relativní rychlosti, tedy homogenní proudění směsi.
- **Eulerian model** - nejvíce komplexní vícefázový model v Ansys Fluent. Řeší skupinu n hybnostních rovnic a rovnic spojitosti pro každou fázi. Propojení fází je dosaženo skrz tlakové a fázově výměnné koeficienty. Způsob, jakým je toto propojení realizováno závisí na typu fáze např. granule (proudění tekutina-solid) je počítáno jinak než bez granulové

(fluid-fluid) proudění. Rozdíl spočívá v předání hybnosti mezi fázemi. Model je možné použít v aplikacích, kde se vyskytují jemně dispergované pevné látky v kapalině (suspenze).

Volba modelu

Možnosti použití daných modelů lze shrnout do těchto bodů:

- obecně se Mixture nebo Eulerian vícefázový model použije tam, kde objemový zlomek dispergované fáze přesahuje 10%.
- Mixture model je vhodnější např. pro rozsáhlou distribuci dispergované fáze (např. pokud se velikost částice mění s velikostí a největší částice nejsou separovány od primární fáze. Pokud je dispergovaná fáze koncentrována v určité zóně, pak je vhodné použít Eulerian model.
- pokud jsou aplikovány Drag laws (odporové parametry) pak Eulerian model poskytne přesnější výsledky než Mixture.
- obecně mixture model je méně náročný na čas výpočtu. Pokud chceme dosáhnout větší přesnosti výpočtu pak je Eulerian model lepší volbou. Na druhou stranu je však méně stabilní než Mixture model.

11.2. Mixture model

11.2.1. Rovnice kontinuity pro směs

Rovnice kontinuity pro směs je dána vztahem

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m) + \nabla \cdot (\rho_m \vec{V}_m) = 0 \quad (11.2.1)$$

kde $V_{m,j}$ jsou složky rychlosti zprůměrované podle hmotnosti

$$V_{m,j} = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k V_{k,j}}{\rho_m} \quad (11.2.2)$$

a ρ_m je hustota směsi

$$\rho_m = \sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k \quad (11.2.3)$$

kde α_k je objemový zlomek fáze k .

11.2.2. Rovnice zachování hybnost

Rovnice zachování hybnosti pro směs je získána sečtením rovnic zachování hybnosti pro jednotlivé fáze

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_m \bar{v}_m) + \nabla \cdot (\rho_m \bar{v}_m \bar{v}_m) = -\nabla p + \nabla \cdot [\eta_m (\nabla \bar{v}_m + \nabla \bar{v}_m^T)] + \rho_m \bar{g} + \bar{F} + \\ + \nabla \cdot \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k \bar{v}_{dr,k} \bar{v}_{dr,k} \right] \end{aligned} \quad (11.2.4)$$

kde n je počet fází, f_i jsou složky vnějších hmotnostních sil, μ_m je dynamická viskozita směsi

$$\mu_m = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu_k \quad (11.2.5)$$

a $v_{dr,k,i}$ je složka unášivé rychlosti

$$\bar{v}_{dr,k} = \bar{v}_k - \bar{v}_m \quad (11.2.6)$$

Relativní (slip) rychlost je definována jako rychlost fáze p k rychlosti sekundární fáze q

$$\bar{v}_{p,q} = \bar{v}_p - \bar{v}_q \quad (11.2.7)$$

Jestliže hmotnostní zlomek fáze k je dán vztahem

$$c_k = \frac{\alpha_k \rho_k}{\rho_m} \quad (11.2.8)$$

pak unášivá rychlost a relativní (slip) rychlost jsou ve vztahu

$$\bar{v}_{dr,p} = \bar{v}_{pq} - \sum_{k=1}^n c_k \bar{v}_{j,q} \quad (11.2.9)$$

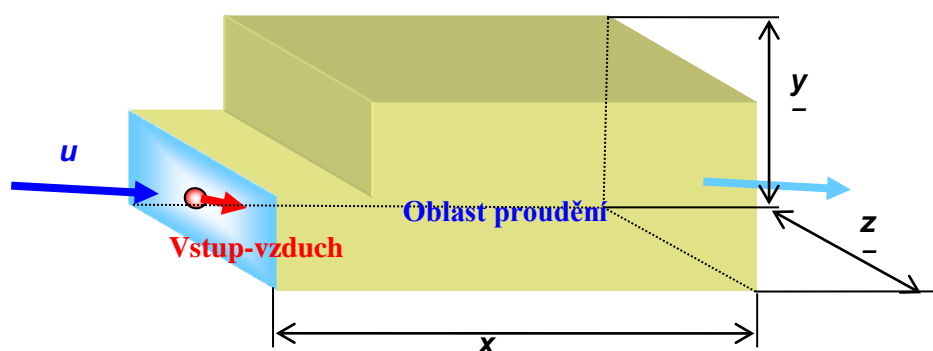
Upřesnění unášivé rychlosti je závislé na definování odporových sil částic atd.

Rovnice objemového zlomku sekundární fáze je dána rovnicí:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_q \rho_q) + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q \bar{v}_m) \frac{1}{\rho_q} = -\nabla \cdot (\alpha_q \rho_q \bar{v}_{dr,q}) + \sum_{p=1}^n (m_{pq} - m_{qp}) \quad (11.2.10)$$

11.2.3. Proudění směsi za schodem

Zobrazte objemové zlomky vody při proudění vody a vzduchu.



obr. 11.1 Schéma řešené oblasti

Geometrie oblasti

délka oblasti x [m]	3.5
výška oblasti y [m]	0.5
šířka oblasti z [m]	1.5

Fyzikální vlastnosti:

	Voda	Zdroj vzduch
Hustota ρ [kgm ⁻³]	998	1.225
Dynamická viskozita η [kg(ms) ⁻¹]	0.001003	1.7894e-05

Okrajové podmínky:

Vstup	intenzita turbulence I [%]	mixture	2
	hydraulický průměr d_h [m]	mixture	0.4
	rychlost u [ms ⁻¹]	voda	1
		vzduch	1
objemový zlomek α [1]	voda	-	
	vzduch	0	
Vstup-vzduch	intenzita turbulence I [%]	mixture	5
	hydraulický průměr d_h [m]	mixture	0.0794
	rychlost u [ms ⁻¹]	voda	0.8
		vzduch	0.8
	objemový zlomek α [1]	voda	-
vzduch		1	

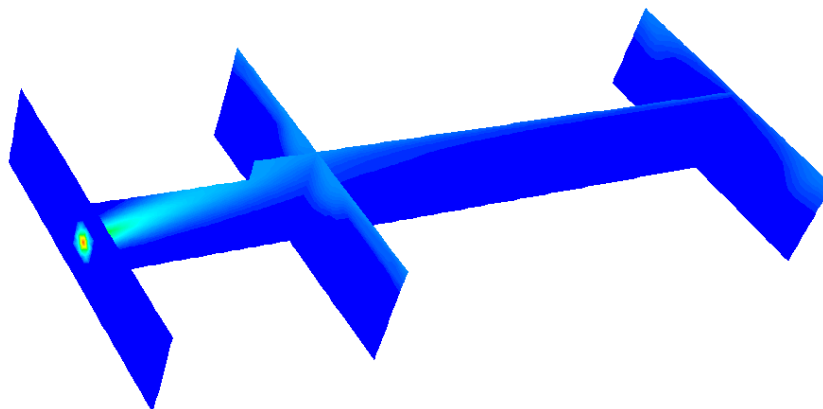
Je možno sledovat také vliv vztlakové síly na šíření vzduchu.

Matematický model:

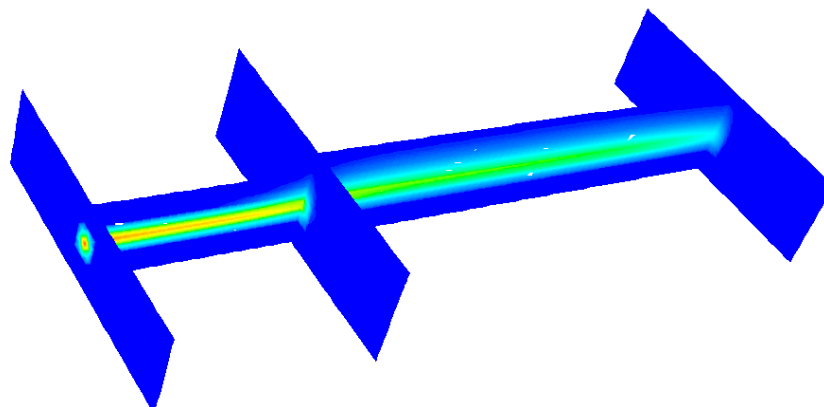
Reynoldsovo číslo

$Re = 400\,000 \Rightarrow$ proudění je turbulentní

Výsledky:



obr. 11.2 Izoplochy objemového zlomku vzduchu v podélném a třech příčných řezech, je uvažována vztlaková síla



obr. 11.3 Izoplochy objemového zlomku vzduchu v podélném a třech příčných řezech, není uvažována vztlaková síla

11.3. Matematické modelování hydraulického rázu.

Hydraulický ráz je definován jako neustálené proudění v čase typický tlakovými pulzacemi a hlukem. Je modelován jako vícefázové proudění vody (voda a vzduch), pomocí jednorozměrného přístupu s použitím modulu stlačitelnosti (Matlab SimHydraulic) a prostorovým modelováním vícefázové směsi vody a vzduchu s využitím metody konečných objemů (Ansys Fluent). Jednotlivé prvky obvodu jsou definovány statickými a dynamickými charakteristikami. Výsledky jsou verifikovány s měřením.

11.3.1. Jednorozměrná analýza - Matlab - SimHydraulics

Díky elektrohydraulické analogii lze zkoumat hydraulické prvky a systémy za pomoci teorie elektrických obvodů, které mají podobné přechodové vlastnosti. Pro hydraulické obvody byly specifikovány následující hydraulické odpory:

- Odpor proti pohybu (reprezentuje třecí a místní odpory): $R_H = \frac{d(\Delta p)}{dQ}$
- Odpor proti zrychlení (indukčnost): $L_H = \frac{\Delta p}{\frac{dQ}{dt}}$
- - dpor proti deformaci (kapacita): $C_H = \frac{Q}{\frac{d(\Delta p)}{dt}}$

Řazení odporu (sériové, paralelní) je v tekutinových systémech stejné jako v systémech elektrických (nejznámější je RLC T-článek). U kombinovaného řazení se jedná o odporovou síť, jejíž řešení popisuje zákon o uzlech a zákon o okruzích.

Pro řešení hydraulického obvodu metodou elektrohydraulické analogie byl použit Matlab-Simulink-SimHydraulics, který používá přímé analogie se skutečnými prvky systému. Každé jednotlivé spojení mezi bloky v Matlabu odpovídá přenosu energie, tak jako ve skutečném systému. Díky tomu lze simulovat systémy popisem jejich fyzické struktury a nemusí se odvozovat matematické vztahy mezi kontrolovanými veličinami [1] [2].

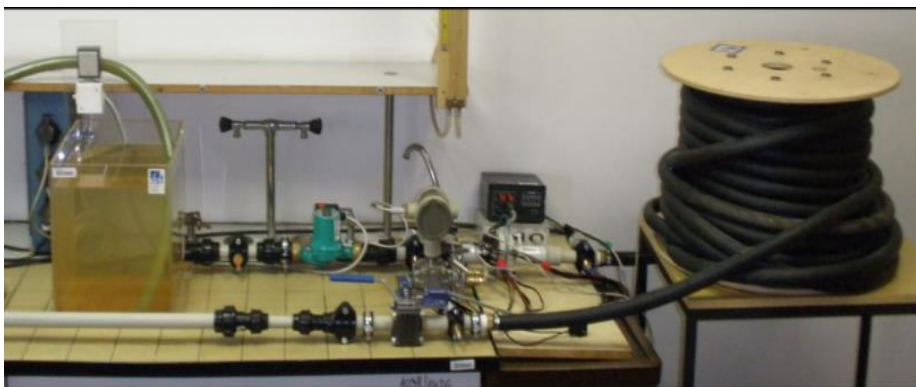
Modul pružnosti byl definován experimentálně nebo pomocí teoretického modulu pružnosti vody $K=2\ 100\ \text{MPa}$ a dvěma objemovými procenty vzduchu.

11.3.1. Vícefázová analýza - Fluent

Matematický model byl definován výše, byla uvažována fáze vody jako nestlačitelného média a fáze vzduchu bude dána jako stlačitelné médium o dvou objemových procentech při normálních podmínkách.

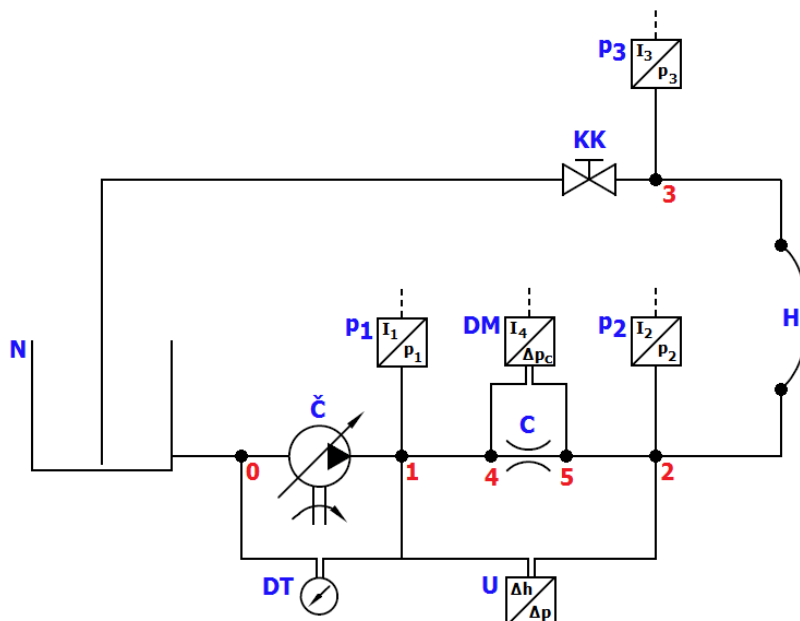
11.3.2. Experiment

Na obr. 11.4 je vyobrazen hydraulický obvod, na kterém byla provedena řada statických i dynamických měření. Výsledkem byly přechodové charakteristiky, které sloužily k definici okrajových podmínek a verifikaci matematického modelování.



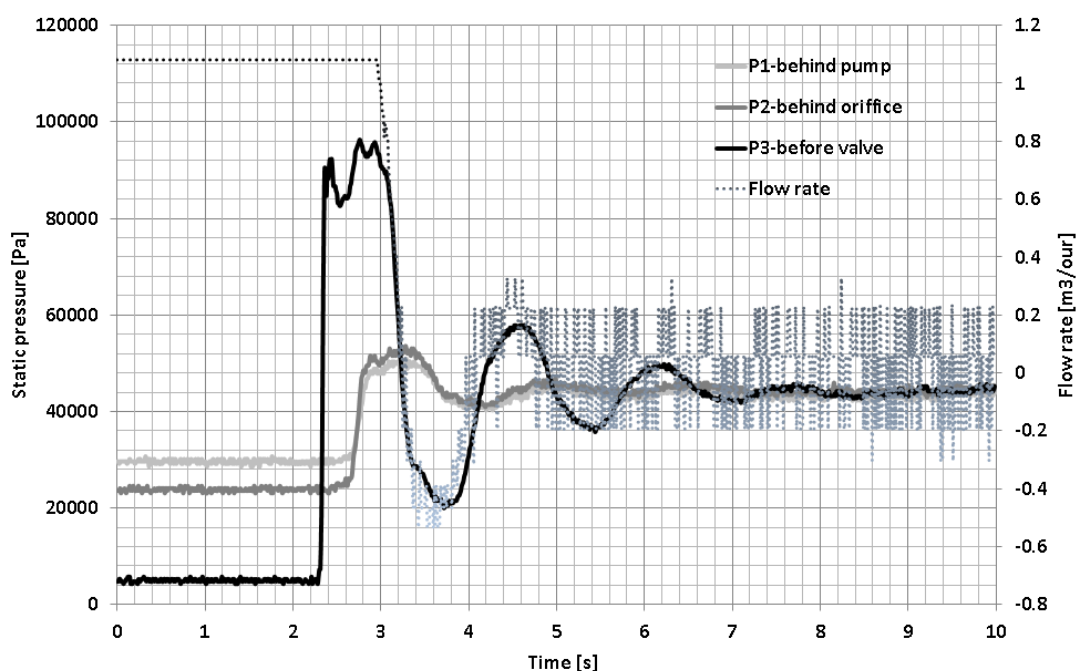
obr. 11.4 Experimentální zařízení pro měření hydraulického rázu

Obvod je složen z prvků: nádrž na vodu, čerpadlo, digitální tlakoměr, clona s diferenčním manometrem pro měření průtoku, U-trubice, kulový kohout, hadice, tři elektrické snímače tlaku p_1 , p_2 a p_3 (připojené k odběrným místům 1 (za čerpadlem), 2 (za clonou) a 3 (před uzavíracím kohoutem)) a spojovací prvky potrubí.



obr. 11.5 Schéma obvodu

Byly změřeny statické charakteristiky všech prvků a následně byl změřen hydraulický ráz vyvolaný rychlým uzavřením kohoutu na konci potrubí. Z měření byly definovány okrajové podmínky, obsah vzduchu v nádrži, teplota. Na obr. 11.6 je vyhodnoceno měření přechodové charakteristiky, kde v levé a pravé části grafu křivky prezentují ustálené stavy a uprostřed je patrný hydraulický ráz. Z grafu je možno odečíst periodu děje, odvodit rychlost zvuku, pozorovat výrazné tlumení a dopočítat základní parametry hydraulického rázu.

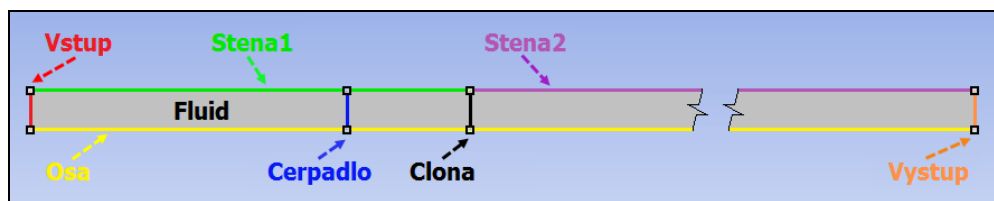


obr. 11.6 Tlak za čerpadlem, za clonou, před kulovým kohoutem a průtok za clonou

Tab. 11.1 Výsledky měření

průtok Q	m ³ /hod	1.08
doba běhu vlny T	s	0.86
skutečná rychlost zvuku a_s	m/s	111.63
modul pružnosti K_s	Pa	12460790
doba uzavírání ventilu t_u	s	0.11
tlak za čerpadlem	Pa	29599.081
tlak za clonou	Pa	23782.898
tlak před ventilem	Pa	4985.2808

Pro modelování byly geometrie, fyzikální vlastnosti, statické charakteristiky čerpadla a clony a okrajové podmínky tlaku respektive průtoku definovány na základě experimentu. Pro simulaci v programu ANSYS Fluent byla geometrie potrubí zjednodušena. Úloha se řešila jako rovinná (dvourozměrná) a osově symetrická z důvodu menšího počtu buněk a tedy menších výpočetních nároků a kratšího výpočetního času. Schéma oblasti a okrajové podmínky jsou zobrazeny na obr. 11.7. Celkem vzniklo 8 podmínek, které jsou přehledně zobrazeny na .



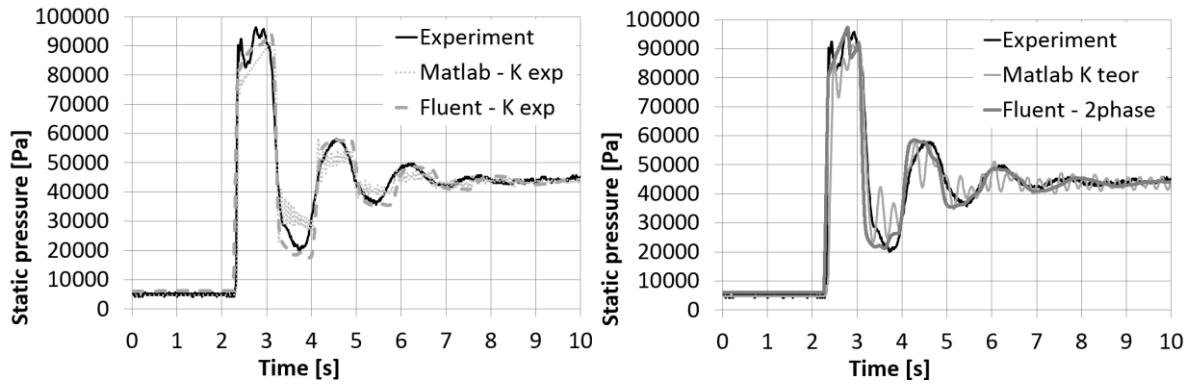
obr. 11.7 Okrajové podmínky

Úloha byla řešena jako osově symetrická a časově závislá se zvoleným časovým krokem 0,001 s. Z důvodů nižších hodnot Reynoldsova čísla byl jako výpočetní model zvolen dvourovnicový turbulentní model k- ϵ RNG, nastavení stěnové funkce bylo "Standard Wall Function". Jako proudící médium byla z databáze Fluentu vybrána voda ("water-liquid"). Proudící médium bylo definováno jako jednofázová stlačitelná kapalina s modulem pružnosti získaným z měření a jako vícefázová směs vody (nestlačitelná kapalina případně stlačitelná kapalina s daným modulem pružnosti) a vzduchu (hustota je dána stavovou rovnicí).

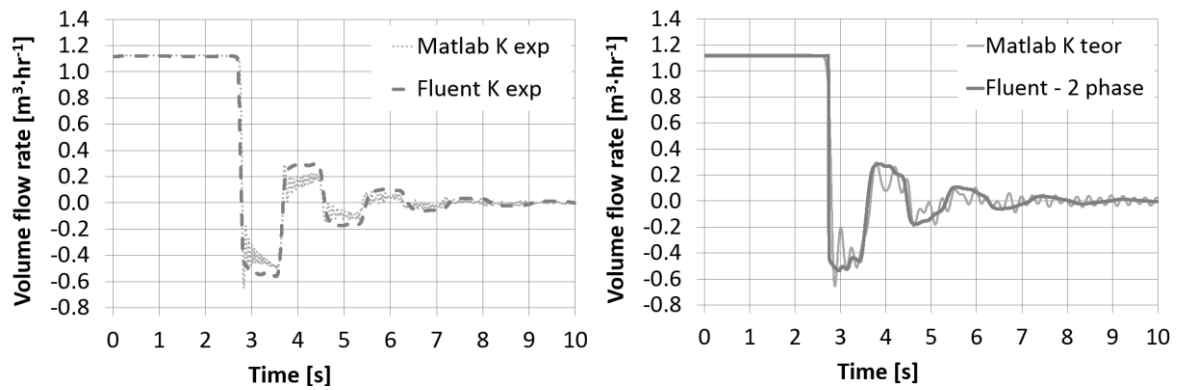
Tab. 11.2 Parametry kapaliny

Reference Pressure	Referenční tlak	p_{ref}	101 325	[Pa]
Reference Density	Referenční hustota	ρ_{ref}	998,2	[kg·m ⁻³]
Reference Bulk Modulus	Modul pružnosti kapaliny	K	12 438 360	[Pa]
Density Exponent	Exponent hustoty		1	[1]
Dynamic Viscosity	Dynamická viskozita	η	0,001003	[Pa·s]

Výsledky matematického modelování obou variant s ohledem na modul pružnosti získané ze simulací pomocí Matlab-SimHydraulics a ANSYS-Fluent byly porovnány s experimentálními výsledky se stejnou specifikací hraničních podmínek, vlastností prvků a drsnosti stěn. Na **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.** se porovnávají hodnoty tlaku před ventilem, který je pro hydraulický ráz nejzajímavější a simulace průtoku je vyhodnocena na **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.** Dynamický průtok nebyl měřen za použití stávajících měřících zařízení.



obr. 11.8 Comparison of static pressure versus time between simulation results and experiment result



obr. 11.9 Comparison of volume flow versus time from simulation results

12. Kavitace

Proudění kapalin v hydraulických soustavách je doprovázené kavitací a kavitacním opotřebením, hlukem a dalšími nežádoucími jevy, které se v současné době dostávají do popředí zájmu v oblastech matematického a experimentálního výzkumu problematiky kavitace v hydraulických prvcích a systémech technické praxe, neboť tyto systémy pracují za stále se zvyšujících provozních podmínek (tlaků a průtoků) a tudíž se tento jev objevuje v řadě technických aplikací.

Tekutina při kavitaci je směs kapaliny, páry a vzduchu, nerozpuštěného ve formě bublin. S obsahem plynu je významně ovlivněna hustota dané kapaliny, což má za následek změnu dynamických vlastností kapaliny. Tedy kavitace vzniká při dosažení určitých fyzikálních stavů kapaliny, především teploty a tlaku. Poklesne-li tlak v místě na tzv. kavitacní tlak, neboli tlak nasycených par, který je funkcí teploty dané kapaliny, dochází k narušení spojitosti kapaliny a vzniká odpařováním kapaliny kavitacní dutina. Na druhé straně může kavitace vzniknout také odtržením proudu od obtékaného povrchu nebo v důsledku kmitání a následně vyvolaných tlakových vln

Proudění kapalin s kavitací je možné jako modelování vícefázového proudění směsi kapalin a par, kdy je uvažována dynamika bublin dle Rayleigh - Plessetovy rovnice. Tento model je časově náročný, ale vzhledem k rozvoji výpočetních možností je možné jej využít.

12.1. Rayleigh -Plessetova teorie

Všechny kavitacní modely jsou založeny na linearizované Rayleigho-Plessetově rovnici popisující růst jednotlivých bublin páry v kapalině:

$$\frac{p_B(t) - p_\infty(t)}{\rho_L} = R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\nu_L}{R} \frac{dR}{dt} + \frac{2S_B}{\rho_L R} \quad (12.1.1)$$

kde $p_B(t)$ je tlak v bublině, $p_\infty(t)$ je tlak v okolí bubliny, ρ_L je hustota kapaliny, ν_L je kinematická viskozita kapaliny, R je poloměr bubliny, S_B je plocha bubliny. Tuto rovnici řešila řada vědců, jako Rayleigh and Plesset, ve zjednodušené podobě (člen povrchového napětí, viskózní člen a členy s vyššími derivacemi byly zanedbány). Zjednodušená diferenciální rovnice v aplikaci do multifázového proudění byla použita ve tvaru:

$$\frac{dR_b}{dt} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_{vap}(t) - p_\infty(t)}{\rho_l}} \quad (12.1.2)$$

Existuje několik modelů kavitace, které jsou odlišné v přístupu řešení a zadávání vstupních parametrů. Zkoumaný systém musí obsahovat fázi kapaliny a páry. V programu FLUENT

jsou dostupné kavitační modely Singhal, Schnerr-Sauer a Zwart-Gerber-Belamri. Modely Schnerr-Sauer a Zwart-Gerber-Belamri jsou stabilnější a tím lze předpokládat rychlejší konvergenci řešení.

12.2. Schnerr and Sauer kavitační model

Tento model je možným přístupem k odvození výrazu pro změnu fáze z kapaliny do páry. Rovnice pro objemový zlomek páry má tvar

$$R = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{\text{vap}} \alpha) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{\text{vap}} \alpha \bar{u}_j) \quad (12.2.1)$$

kde R prezentuje generaci páry nebo rychlost odpařování.

$$R = \frac{\rho_{\text{vap}} \rho_l}{\rho} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \alpha)}{\partial x_j} \right) \quad (12.2.2)$$

Když je tato rovnice implementována do předchozí rovnice, pak se získá tvar

$$R = \frac{\rho_{\text{vap}} \rho_l}{\rho} \alpha (1 - \alpha) \frac{3}{R_b} \sqrt{\frac{2(p_{\text{vap}} - p)}{3\rho_l}} \quad (12.2.3)$$

Poloměr bubliny je

$$R_b = \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{3}{4\pi n_b} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (12.2.4)$$

Tedy v tomto modelu je jediný parameter, který musí být definován, je počet kulových bublin v objemu kapaliny n_b . Jestliže předpokládáme, že žádné bubliny se netvoří nebo neztrácejí, pak hustota bublin bude konstantní.

Závěrečný tvar rovnic je :

$$\text{if } p \leq p_{\text{vap}} \quad R_c = \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \alpha (1 - \alpha) \frac{3}{R_b} \sqrt{\frac{2(p_{\text{vap}} - p)}{3\rho_l}} \quad (12.2.5)$$

$$\text{if } p \geq p_{\text{vap}} \quad R_c = \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \alpha (1 - \alpha) \frac{3}{R_b} \sqrt{\frac{2(p - p_{\text{vap}})}{3\rho_l}} \quad (12.2.6)$$

12.3. Kavítace v dýze

12.3.1. Popis experimentu

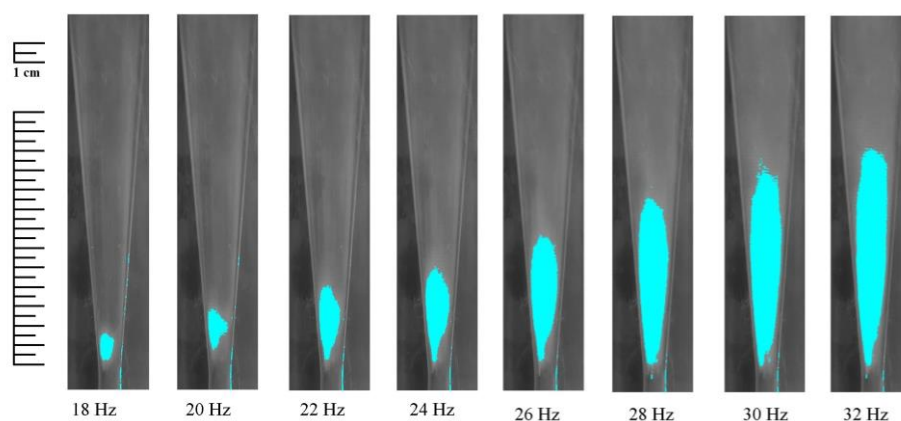
Experimentální zařízení sestávalo z hydraulického obvodu s konvergentně-divergentní transparentní dýzou, frekvenčním měničem, průtokoměrem, snímači tlaku a hluku a sondou pro měření rozpuštěného kyslíku. Průtok v okruhu byl vyvolán čerpadlem připojeným k nádrži, pracovní kapalinou byla voda. Za průtokoměrem byla umístěna dýza. Se zvyšujícími se otáčkami čerpadla se v dýze trysce uvolňovalo více vzduchu. Změna obsahu kyslíku ve vodě byla měřena snímačem rozpuštěného kyslíku umístěným v nádrži. Na začátku a na konci dýzy byly namontovány snímače tlaku. Úhel rozšíření v části difuzéru dýzy se rovná $7,3^\circ$, což je menší než kritická hodnota 12° , při které dochází k odtržení proudění [2]. Průtok byl regulován změnou frekvence motoru čerpadla pomocí měniče kmitočtu. Foto obvodu je na **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.** Měření byla provedena pro 12 různých frekvencí motoru čerpadla od 10 Hz do 32 Hz se stupněm 2 Hz, viz Tab. 12.1.



obr. 12.1 Foto hydraulického obvodu

Tab. 12.1 Výsledky měření

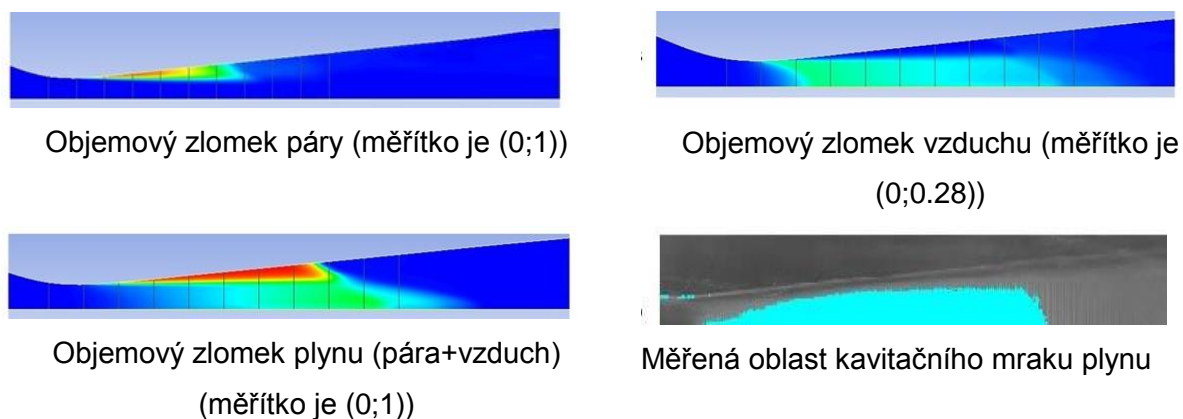
f	Q_v	p_{in}	p_{out}	L
Hz	l/s	Pa	Pa	cm
18	2.61	138982	96476	1.6
20	2.79	155301	96725	2.2
22	2.95	173085	97048	4.1
24	3.15	192279	97329	5.3
26	3.31	213556	97775	7.0
28	3.49	236471	98202	9.4
30	3.68	260885	98493	11.0
32	3.88	286609	97937	11.5



obr. 12.2 Vývoj kavitačního mraku

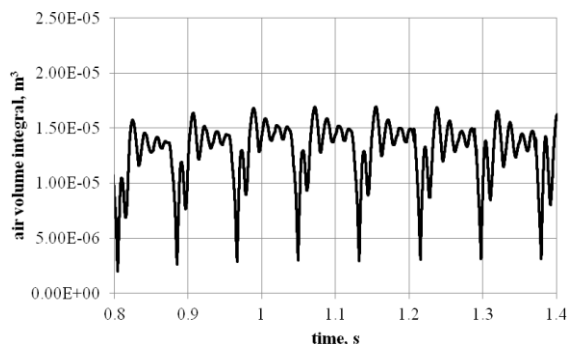
12.3.1. Výsledky

Pro další výpočet byl zvolen nejvhodnější turbulentní model a provedla se série testů. Pro jednu frekvenci motoru čerpadla rovnající se 32 Hz (maximální průtok) byly testovány čtyři různé modely turbulence: $k-\varepsilon$ RNG, $k-\varepsilon$ realizable, $k-\omega$, SAS. Nakonec na základě srovnání velikosti kavitační oblasti byl zvolen $k-\varepsilon$ RNG model pro další výpočet a výsledky jsou v **obr. 12.3**.

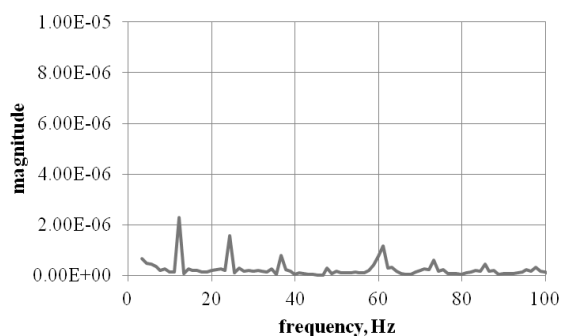


obr. 12.3 Srovnání objemového zlomku páry, vzduchu, páry+vzduchu s experimentálním vyhodnocením

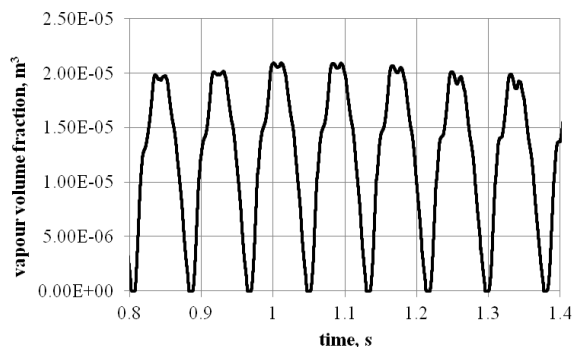
Změny objemu vzduchu a páry v oblasti v závislosti na čase uvedeny na obr. 12.4. Lze pozorovat, že pro paru jedna frekvence dominuje ostatním, v případě objemů vzduchu je možno pozorovat několik frekvencí. Výsledky analýzy FFT jsou uvedeny také na obr. 12.4. Frekvence získané analýzou FFT byly 12,2 Hz, 24,4 Hz a 36,6 Hz.



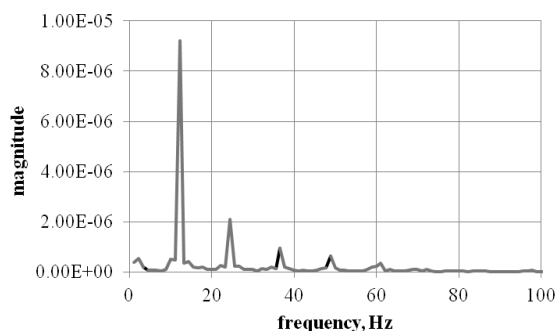
Objemový integrál vzduchové fáze v čase,
frekvence motoru 32 Hz



FFT analýza objemového integrálu
vzduchové fáze, frekvence motoru 32 Hz



Objemový integrál parní fáze v čase,
frekvence motoru 32 Hz



FFT analýza objemového integrálu plynové
fáze, frekvence motoru 32 Hz

obr. 12.4 Časové řady a FFT analýza objemového integrálu par a vzduchu

Po provedení simulace lze konstatovat, že v případě parní fáze existuje jedna hlavní frekvence zvětšování a zmenšování kavitační oblasti, zatímco vzduchová fáze mění velikost kavitačního mraku s frekvencí, kde nepřevažuje významně jedna frekvence. Rovněž bylo zjištěno, že pro parní typ kavitace (který se vyskytuje při průtokové frekvenci 2,61 l / s - 18 Hz frekvence motoru) se objevily vyšší frekvence kavitačního mraku. Když se v kavitačním oblaku objeví více vzduchu, frekvence růstu a zmenšování kavitačního mraku se snižuje (3,88 l/s - 32 Hz frekvence motoru). Znamená to, že vzduch je odpovědný za nižší frekvence v analýze změny velikosti kavitačního mraku a také hluku.

13. Příloha

13.1. Vektory a skaláry

Veličiny, které lze určit pouhým číslem, jakmile je zvolena jednotka míry, se nazývají **skaláry**. Vektor je veličina, jež poskytuje různé údaje. Jeden je aritmetický (jeho velikost), ostatní jsou geometrické. **Vektor** je orientovaná úsečka.

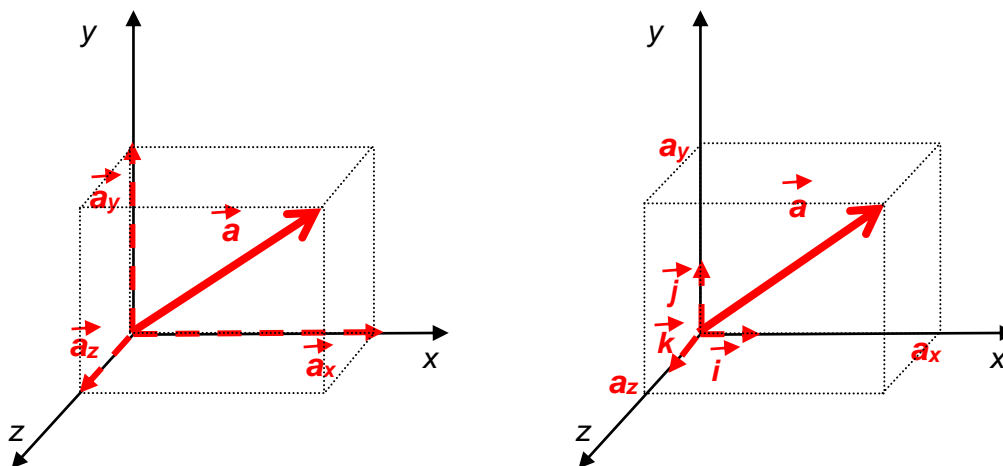
Předpokládejme pravoúhlou soustavu souřadnic a necht' bod je dán třemi souřadnicemi $\vec{x} = (x, y, z)$. Necht' \vec{a}_x , \vec{a}_y , \vec{a}_z jsou průměty vektoru \vec{a} do os souřadnic.

Tyto vektory se nazývají **složky** vektoru \vec{a} a platí

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \quad (13.1.1)$$

Je-li \vec{i} jednotkový vektor osy x, je $\vec{a}_x = \vec{i} a_x$, kde a_x je číslo, vyjadřující velikost vektoru \vec{a}_x a nazývá se x-ová **souřadnice vektoru**, viz obr. 13.1. Podobně platí $\vec{a}_y = \vec{j} a_y$ a $\vec{a}_z = \vec{k} a_z$. Dále je možno psát

$$\vec{a} = \vec{i} a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z \quad (13.1.2)$$



obr. 13.1 Složky vektoru, souřadnice vektoru, jednotkové vektory

Vektor je v daném souřadném systému definován jako uspořádaná trojice čísel a zapisuje se

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ resp. } \vec{a}(a_x, a_y, a_z) \quad (13.1.3)$$

Skalární součin vektorů \vec{a} a \vec{b} o souřadnicích $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ a $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ je skalár

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \text{ resp. } \vec{a} \cdot \vec{a} = a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z = |\vec{a}|^2 \quad (13.1.4)$$

Dyadický součin vektorů je tenzor

$$\vec{a} \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix} \quad (13.1.5)$$

Je-li dána skalární funkce $f(x, y, z)$, pak **gradient skalární funkce** je vektor o souřadnicích

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ a $\frac{\partial f}{\partial z}$, tedy

$$\text{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (13.1.6)$$

a často se používá symbolické označení $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

Je-li dán vektor \vec{a} o souřadnicích a_x, a_y, a_z , pak **gradient vektorové funkce** je tenzor, tedy

$$\text{grad} \vec{a} = \nabla \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial x} & \frac{\partial a_x}{\partial y} & \frac{\partial a_x}{\partial z} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} & \frac{\partial a_y}{\partial y} & \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_z}{\partial x} & \frac{\partial a_z}{\partial y} & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (13.1.7)$$

Nechť \vec{a} je vektor o souřadnicích a_x, a_y, a_z . Pak **divergence vektoru** \vec{a} je skalár

$$\text{div} \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (a_x, a_y, a_z) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (13.1.8)$$

Derivace vektoru \vec{a} **podle vektoru** \vec{b} se označuje $\left(\vec{b} \cdot \text{grad} \right) \vec{a}$ a je výraz definovaný následovně

$$\begin{aligned}
 (\vec{b} \cdot \text{grad}) \vec{a} &= (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} = \left(b_x \frac{\partial}{\partial x} + b_y \frac{\partial}{\partial y} + b_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{a} = \\
 &= \begin{pmatrix} b_x \frac{\partial a_x}{\partial x} + b_y \frac{\partial a_x}{\partial y} + b_z \frac{\partial a_x}{\partial z} \\ b_x \frac{\partial a_y}{\partial x} + b_y \frac{\partial a_y}{\partial y} + b_z \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ b_x \frac{\partial a_z}{\partial x} + b_y \frac{\partial a_z}{\partial y} + b_z \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_x}{\partial y} b_y + \frac{\partial a_x}{\partial z} b_z \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_y}{\partial y} b_y + \frac{\partial a_y}{\partial z} b_z \\ \frac{\partial a_z}{\partial x} b_x + \frac{\partial a_z}{\partial y} b_y + \frac{\partial a_z}{\partial z} b_z \end{pmatrix} \quad (13.1.9)
 \end{aligned}$$

Divergence dyadického součinu vektorů (resp. tenzoru) je :

$$\nabla \cdot (\vec{a} \vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(a_x a_x)}{\partial x} + \frac{\partial(a_y a_x)}{\partial y} + \frac{\partial(a_z a_x)}{\partial z} \\ \frac{\partial(a_x a_y)}{\partial x} + \frac{\partial(a_y a_y)}{\partial y} + \frac{\partial(a_z a_y)}{\partial z} \\ \frac{\partial(a_x a_z)}{\partial x} + \frac{\partial(a_y a_z)}{\partial y} + \frac{\partial(a_z a_z)}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (13.1.10)$$

13.2. Souřadné systémy

Představme si, že stojíme na mostě a pozorujeme, jak se koncentrace ryb právě pod námi mění s časem. Tak zjistíme, jak se koncentrace mění s časem v nehybném místě prostoru pevně spojeným s povrchem země. Tento prostor se nazývá **absolutní prostor** a je základní prostor. Veličina $\frac{\partial c}{\partial t}$ je **parciální derivace** koncentrace c podle t při konstantních souřadnicích x, y, z .

Nyní místo, abychom stáli na mostě, nasedneme do motorového člunu a jezdíme po řece, někdy proti proudu, někdy napříč řeky a někdy po proudu. Změna koncentrace ryb s časem bude záviset nějak na pohybu člunu. Pak **totální derivace** koncentrace podle času je dána vztahem

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial c}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (13.2.1)$$

kde $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ a $\frac{dz}{dt}$ jsou složky rychlosti člunu.

Nyní nasedneme do člunu, necháme se unášet proudem a budeme počítat ryby.

Rychlost pozorovatele je teď stejná, jako rychlost proudu \vec{v} . Udáváme-li změnu koncentrace ryb s časem, závisí na místní rychlosti proudu. Tato derivace je zvláštní druh totální derivace a nazývá se **substanciální derivace** nebo „derivace sledující pohyb“. Její vztah k parciální derivaci podle času je

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} u_x + \frac{\partial c}{\partial y} u_y + \frac{\partial c}{\partial z} u_z \quad (13.2.2)$$

kde u_x , u_y a u_z jsou složky místní rychlosti vody. **Prostor je relativní**, tj. je to malý prostor, který se vzhledem k absolutnímu prostoru může pohybovat.

13.3. Pole rychlosti a zrychlení

Při proudění tekutiny bude uvažováno **pole rychlostí** dané vektorovou funkcí [1]

$$\vec{u} = \vec{u}(t, \vec{x}) \quad (13.3.1)$$

Rychlost je definována v bodě \vec{x} , jehož složky závisí na zvoleném souřadnicovém systému. V nejobecnějším případě je rychlost trojrozměrný časově závislý vektor.

Zrychlení tekutiny je předepsáno obvyklým způsobem

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt} \quad (13.3.2)$$

Označení derivace písmenem D představuje **substanciální derivaci**. Substanciální derivace skaláru (teplota, koncentrace) je možno vyjádřit vektorově

$$\frac{D(\zeta)}{Dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} u_x + \frac{\partial \zeta}{\partial y} u_y + \frac{\partial \zeta}{\partial z} u_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \zeta \cdot \vec{u} \quad (13.3.3)$$

První část $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ se nazývá **lokální časová derivace** a druhá část $\nabla \zeta \cdot \vec{u}$ je tzv. **konvektivní derivace**.

Substanciální derivace vektoru je složitější a platí (pro přehlednost je vektor napsán ve sloupcích

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \begin{pmatrix} \frac{Du_x}{Dt} \\ \frac{Du_y}{Dt} \\ \frac{Du_z}{Dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z \end{pmatrix} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{u} \end{pmatrix} \quad (13.3.4)$$

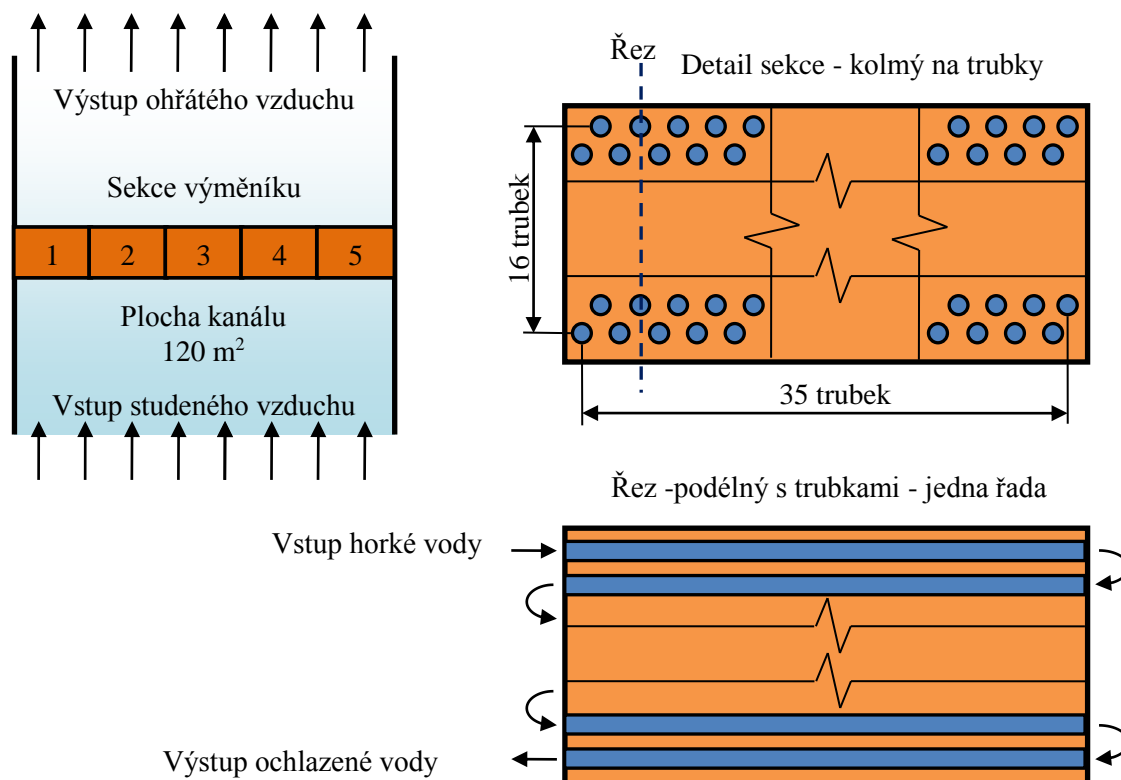
13.4. Výpočet tepelného výměníku voda-vzduch

Tento příklad se zabývá matematickým modelováním proudění ve výměníku voda-vzduch. Příklad je ilustrativní zabývající se definováním matematické metody a postupu řešení, proto nebudou uváděny všechny podrobnosti o geometrii, rozměrech apod.

V důsledku špatné činnosti prachových filtrů dochází na teplosměnných plochách výměníku k usazování prachu a vzdušné vlhkosti, a následně pak ke korozi teplosměnných ploch výměníku. Vzhledem k tomu, že teplosměnné plochy jsou tvořeny žebrovanými trubkami, dochází vlivem koroze ke snížení účinnosti (zkorodování žeber).

Výměník je tvořen pěti sekcemi. Každá sekce je tvořena celkem 560 kusy žebrovaných trubek, které jsou rozloženy v matici 16x35 (16 řadách po proudu a 35 řad kolmo na proud).

Výsledkem příkladu je návrh záměny žebrovaných trubek za trubky hladké, jejichž teplosměnná plocha není korozi tak intenzivně ovlivněna. Příklad je rozdělen do dvou částí. V první části bude provedena analýza proudění pro čistý, nezanesený výměník a dále zkorodovaný a zanesený výměník. V druhé části budou zaměněny původní žebrované trubky za trubky hladké a iteračním postupem bude navržen počet trubek, který je nezbytný pro dosažení výkonu dle původního projektu (příklad s čistými žebrovanými trubkami).



obr. 13.2 Schéma výměníku spalin

Fyzikální vlastnosti materiálu (ocel, vzduch, voda) při 300 K

Proudící vzduch je možné nahradit v modelu materiálem, který má konstantní hustotu, protože změna teploty je poměrně malá.

Pevné stěny trubek výměníku byly z materiálu 13CrMo44, jedná se tedy o vysoce legovanou ocel.

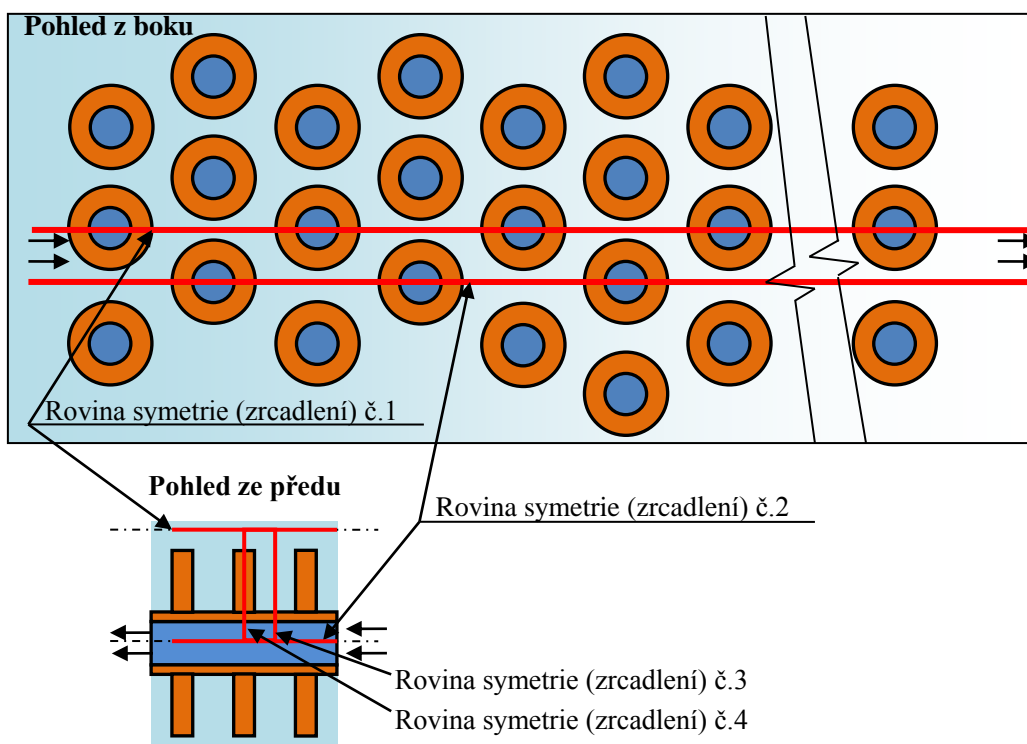
Usazeniny jsou komplexní materiál, který obsahuje celou řadu sloučenin. Ve výpočtu bude provedeno zjednodušení, a nánosy budou reprezentovány jedním materiálem dle následující tabulky. Dále bude ve výpočtu zahrnuta koroze žeber, takže na ocelovém povrchu je tenká vrstva rzi.

Tab. 13.1 Fyzikální vlastnosti materiálů, které byly použity ve výpočtech

materiál	Vzduch	Voda	Ocel	Rez	Nánosy
Hustota ρ [kg·m ⁻³]	1.077	998.2	8030	5300	2980
Měr. tep. kapacita c_p [J·kg ⁻¹ ·K ⁻¹]	1006	4182	502	781	732
Tepelná vodivost λ [W·m ⁻¹ ·K ⁻¹]	0.0242	0.6	44.0	3	0.1
Viskozita η [kg·m ⁻¹ ·s ⁻¹]	1.7894·10 ⁻⁰⁵	0.001003			

Geometrie oblasti

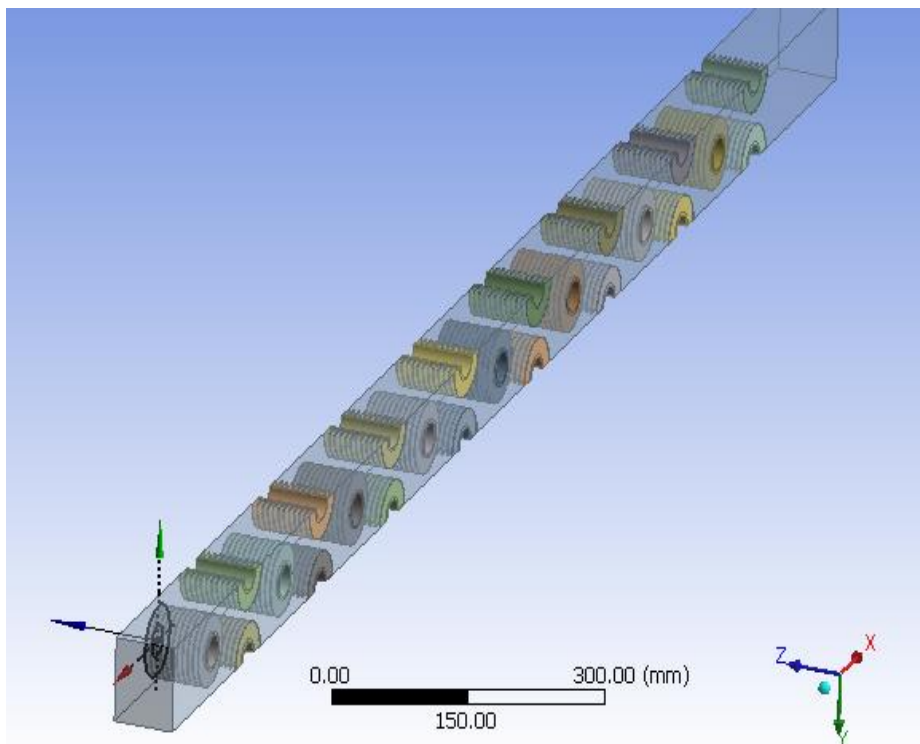
Výpočetní oblast byla vytvořena z plného modelu využitím všech možných rovin symetrie ve výměníku. Celkem bylo možné využít čtyři roviny symetrie, viz obr. 13.3.



obr. 13.3 Zobrazení rovin symetrie (zrcadlení) v výměníku

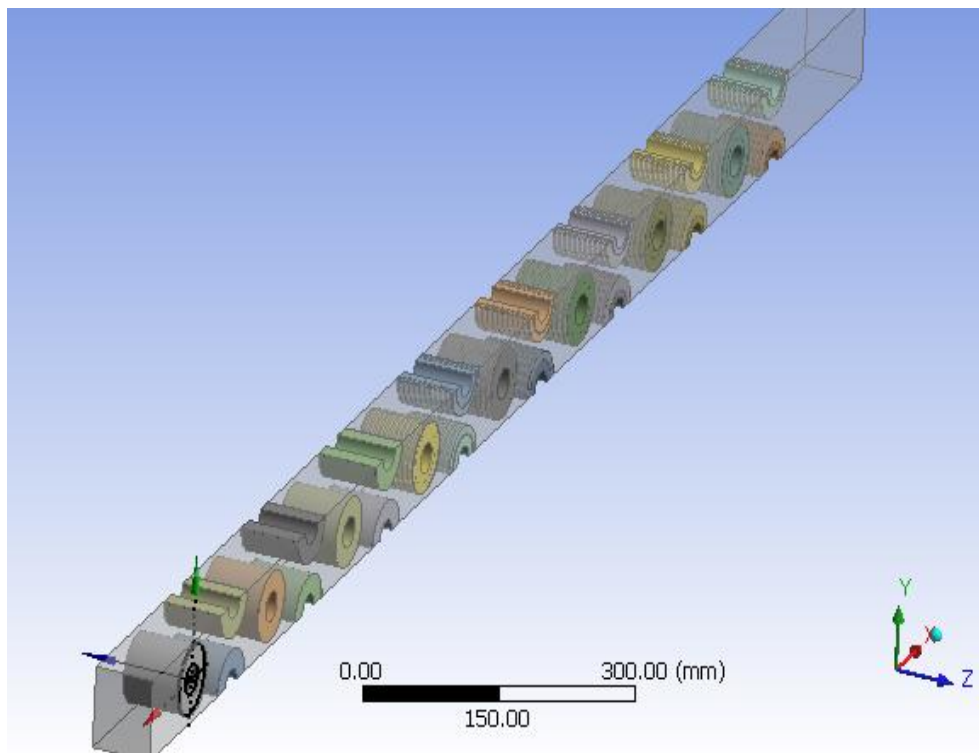
Výpočtová geometrie byla sestavena pro základní úlohy:

1) Žebrované trubky bez nánosů a rzi. Tato výpočtová geometrie byla sestavena dle výkresové dokumentace. 3D model je zobrazen na obr. 13.4.



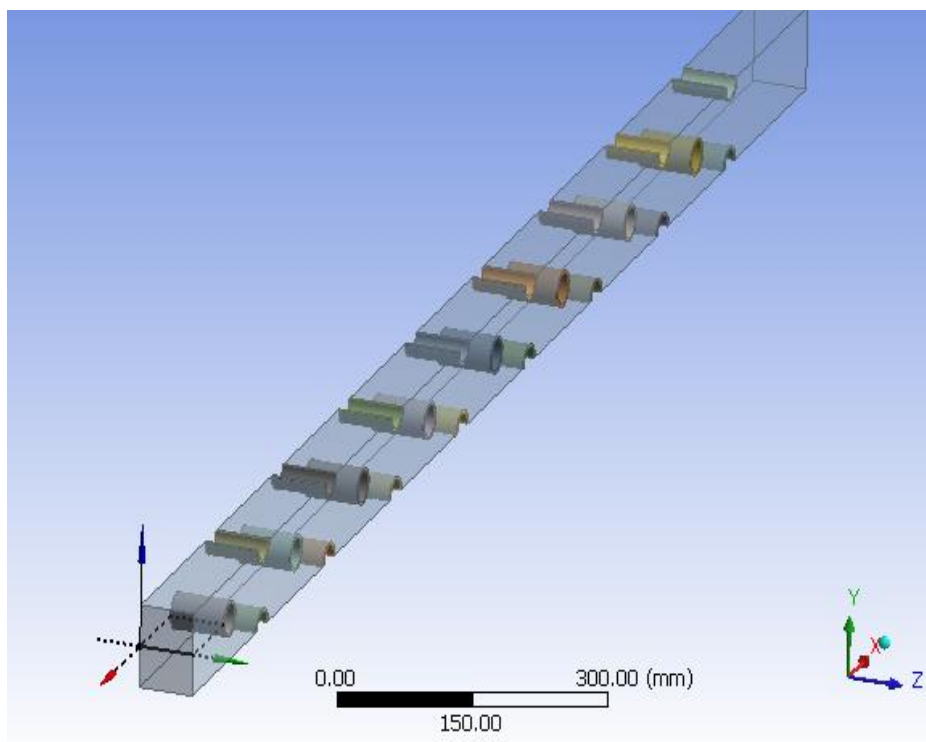
obr. 13.4 Zobrazení geometrie pro hladké žebrované trubky (pro názornost zvětšeno)

2) Žebrované trubky s nánosy. Tato výpočtová v geometrie z bodu č.1. byla doplněna o nánosy a rez. Rozložení a tloušťka nánosů byla stanovena na základě fotografií, které byly obsaženy v předané dokumentaci. Prvních 6 řad trubek (řada 1-6) je zaneseno usazeninami. Nánosy zcela zakrývaly jednotlivá žebra a trubky tedy vypadaly z vnějšího pohledu jako hladké s velice silnou stěnou. Dalších 5 řad (řada 7-11) je zaneseno tak, že na povrchu trubek byl vytvořen souvislý nanos rzi o tloušťce 1.25 mm. Posledních 5 řad (řada 12-16) bylo zaneseno tak, že povrch trubek byl pokryt souvislým nánosem rzi o tloušťce 0.625 mm.. 3D model je zobrazen na obr. 13.6.



obr. 13.5 Zobrazení geometrie pro zanesené žebrované trubky (pro názornost zvětšeno)

3) Jako náhrada za žebrované trubky jsou projektovány trubky hladké, přičemž geometrické rozložení je totožné.



obr. 13.6 Zobrazení geometrie pro hladké trubky (pro názornost zvětšeno)

13.4.1. Výpočet reálného stavu

Okrajové podmínky

Okrajové podmínky jsou definovány jak pro vzduch, tak i pro vodu. Všechny parametry jsou u skutečného výměníku změřeny, protože jsou součástí provozního měření.

Tab. 13.2 Okrajové podmínky

	Čisté trubky	Zanesené trubky
Objemový průtok vzduchu Q_V [$\text{m}_N^3 \cdot \text{h}^{-1}$]	1680000	1680000
Intenzita turbulence I [%]	20	20
Hydraulický průměr d_h [m]	0.1	0.1
Teplota vzduchu na vstupu t_{vz} [$^{\circ}\text{C}$]	45	50
Teplota vstupní vody t_{vstup} [$^{\circ}\text{C}$]	110	109
Teplota výstupní vody $t_{výstup}$ [$^{\circ}\text{C}$]	70	95

Vzhledem k řešení s využitím rovin symetrie je nutné přepočítat celkový tok spalin na dílčí tok, či lépe rychlost. Plocha vstupního kanálu je 120 m^2 . Nejprve je nutné přepočítat průtok, který je zadán v normálním stavu, na průtok skutečný. Výpočet započneme z rovnice kontinuity

$$Q_m = \rho_{sk} \cdot Q_{sk} = \rho_N \cdot Q_N$$

Skutečný průtok je pak možné stanovit ze vztahu

$$Q_{sk} = \frac{\rho_N}{\rho_{sk}} \cdot Q_N$$

Využitím stavové rovnice je možné vzorec ještě dále upravit

$$\rho = \frac{p}{r \cdot T}$$

Po dosazení je tedy výsledný vztah pro skutečný průtok

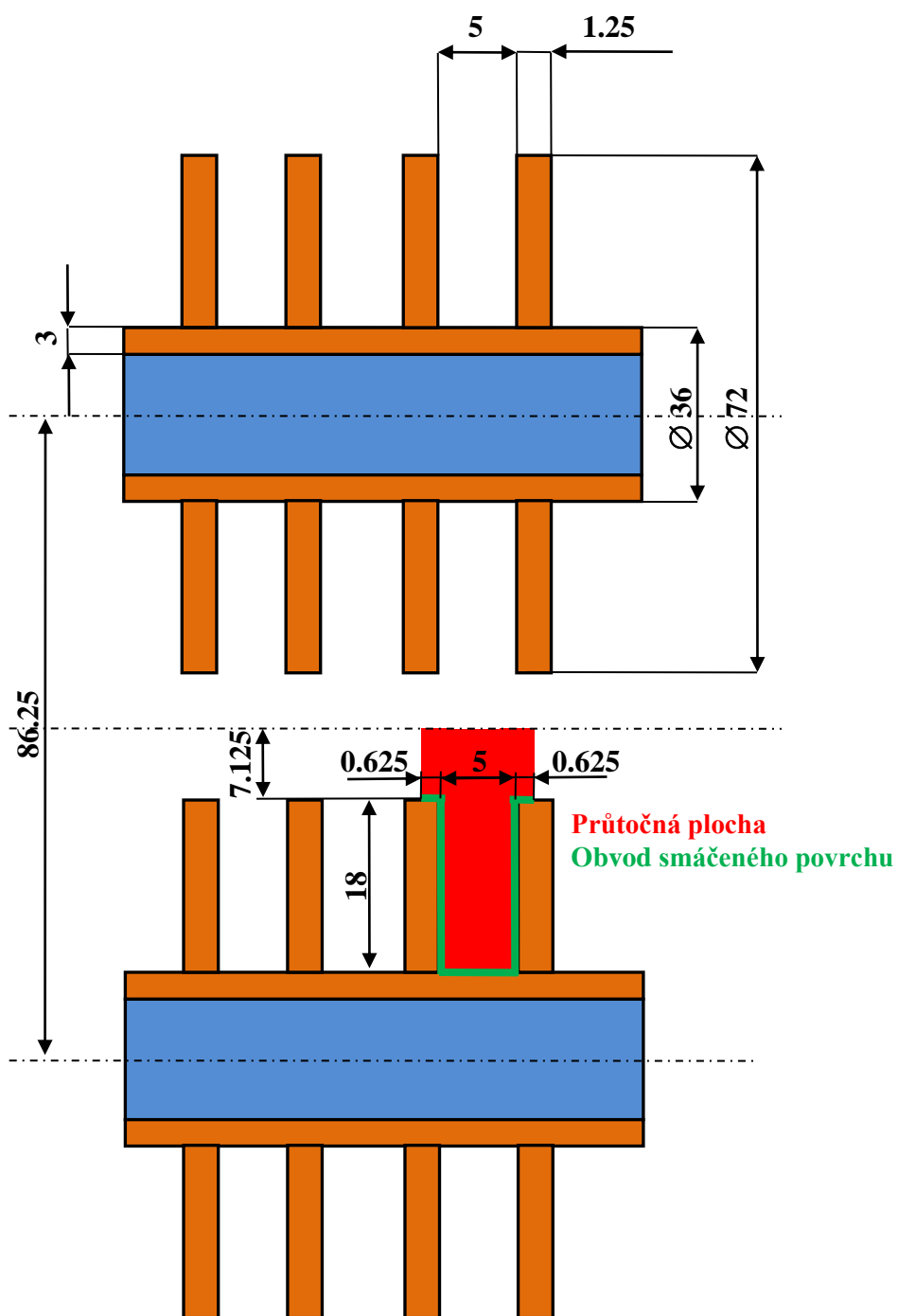
$$Q_{sk} = \frac{T_{sk}}{T_N} \cdot Q_N$$

$$Q_{sk} = \frac{(45 + 273.16)}{273.16} \cdot \frac{1680000}{3600} = 543.5 [\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}]$$

Skutečná rychlost vzduchu na vstupu je pak z rovnice kontinuity

$$v_{sk} = \frac{Q_{sk}}{S} = \frac{543.5}{120} = 4.52 [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$$

Pro stanovení režimu proudění je nutné stanovit Reynoldsovo číslo, které je kritériem turbulence. Pro výpočet Re čísla je nutné znát geometrické parametry žebrované trubky



obr. 13.7 Zobrazení žebrování trubky a znázornění parametrů pro definici hydraulického průměru

Jelikož se nejedná o jednoduchý kruhový průřez, je nutné vypočítat hydraulický průměr. Jako základní průtočný průřez budeme uvažovat prostor mezi žebry. Hydraulický průměr je vypočítán ze vztahu, který je poměrem délky smáčeného povrchu o k průtočné ploše S

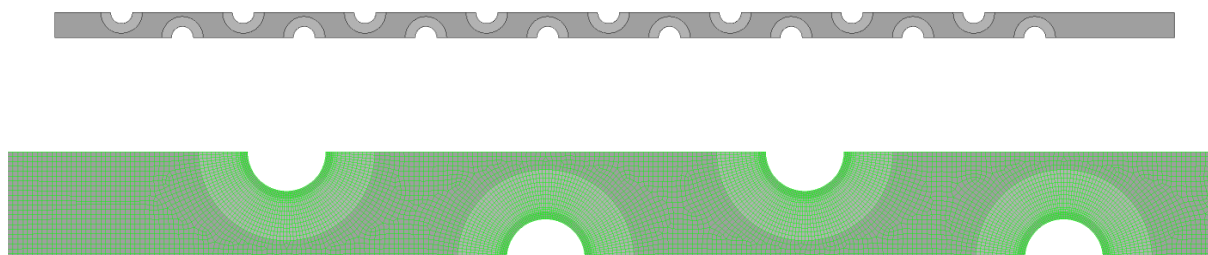
$$D_H = \frac{4 \cdot S}{o} = \frac{4 \cdot (18 \cdot 5 + (5 + 2 \cdot 0.625) \cdot 7.125)}{5 + 2 \cdot 18 + 2 \cdot 0.625} = 12.73 [\text{mm}]$$

Reynoldsovo číslo je pak možné stanovit s využitím hydraulického průměru jako:

$$\text{Re}_{\text{vzduch}} = \frac{v \cdot D_H}{\nu} = \frac{4.5 \cdot 0.01273}{1.46073 \cdot 10^{-5}} = 3921$$

Jedná se tedy o přechodový režim proudění. Je nutné podotknout, že výpočet Re čísla je pouze odhad, protože na základě jiných geometrických parametrů je možné stanovit jinou hodnotu. Všeobecně se však jedná o proudění přechodové. Pro výpočet je tedy nutné použít model turbulence SST $k-\omega$, které umožňují řešit proudění s nízkým Re číslem.

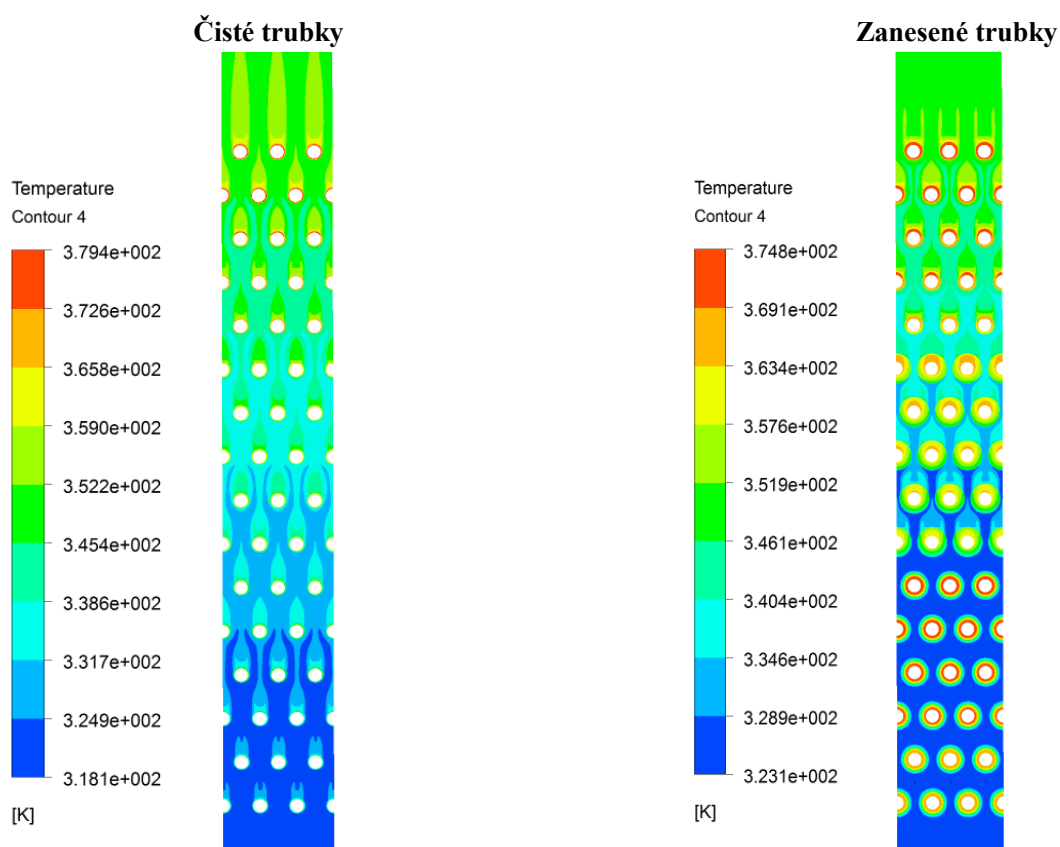
Na následujícím obrázku je zobrazena reálná výpočtová geometrie a výpočtová síť



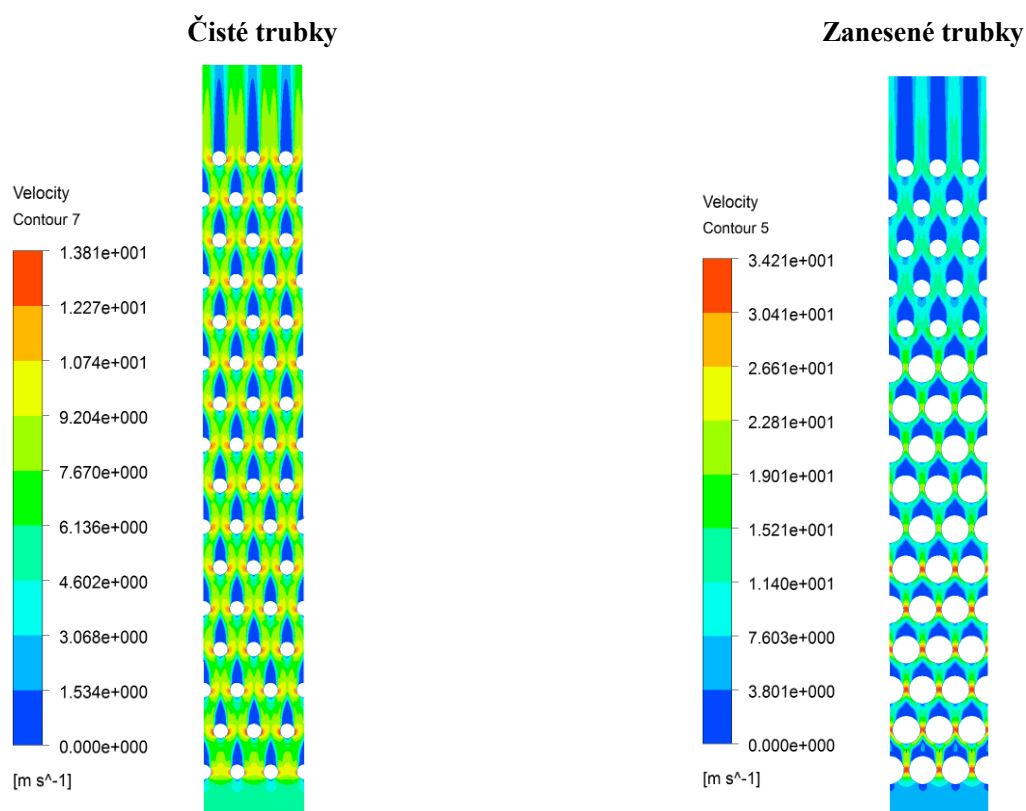
obr. 13.8 Zobrazení reálné výpočtové oblasti a výpočetní síť

Výsledky výpočtu

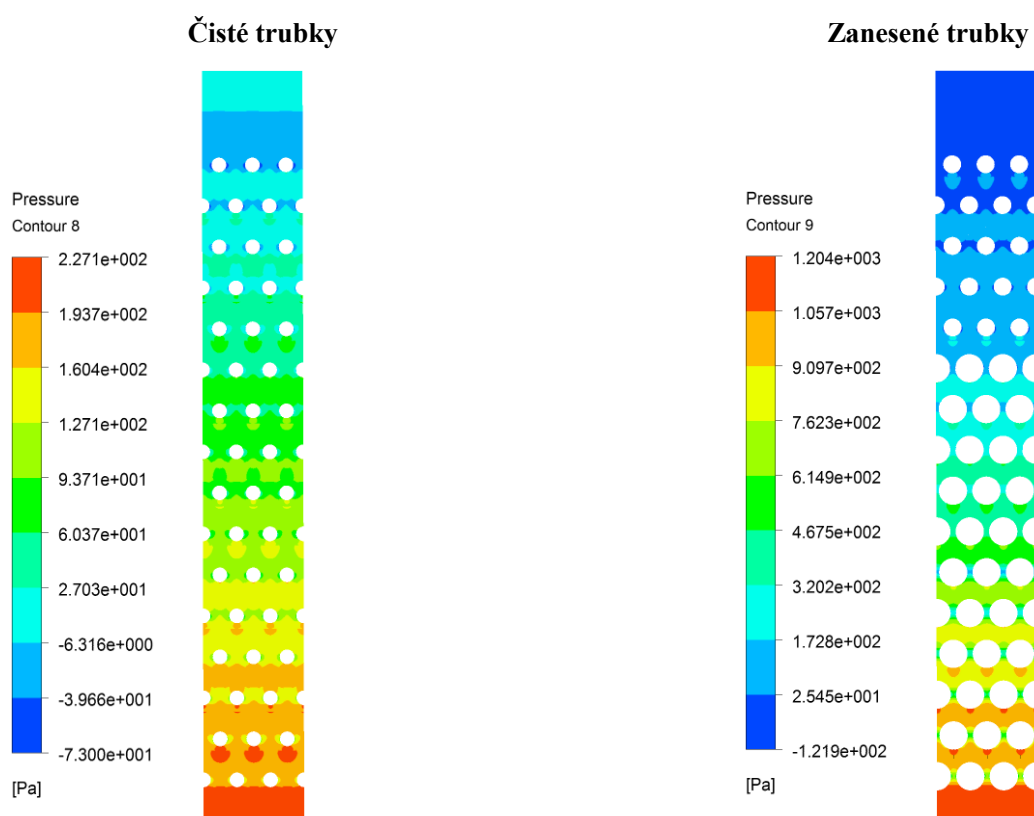
Hlavním výsledkem výpočtu je zobrazení teplotního pole ve výměníku. Dále jsou v přehledně v tabulce vyhodnoceny základní parametry výměníku. Z hlediska přehlednosti jsou grafické výstupy v postprocesoru zrcadleny a počet zobrazení je násoben. Celkem je tedy vždy zobrazena výpočtová oblast šestkrát.



obr. 13.9 Porovnání teploty ve výměníku pro čisté a zanesené trubky (využito zrcadlení)



obr. 13.10 Porovnání rychlosti ve výměníku pro čisté a zanesené trubky (využito zrcadlení)



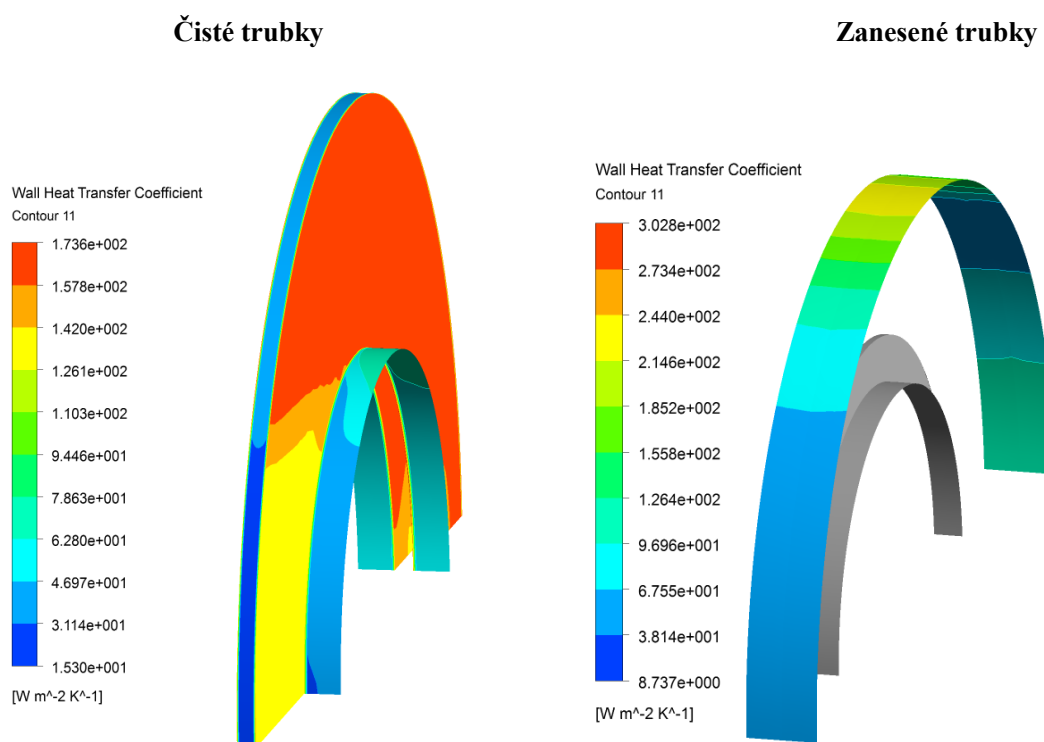
obr. 13.11 Porovnání stat. tlaku ve výměníku pro čisté a zanesené trubky (využito zrcadlení)

Tab. 13.3 Srovnání základních parametrů výměníku pro čisté a zanesené trubky

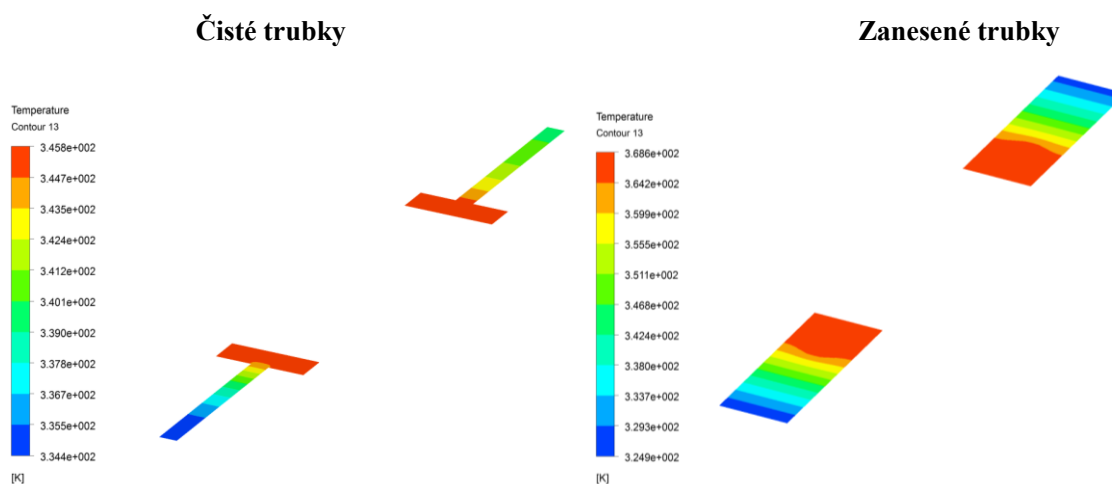
	Čisté trubky	Zanesené trubky
Objemový průtok vzduchu Q_V [$\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$]	1680000	1680000
Tlaková ztráta Δp [Pa]	277	1182
Zvýšení teploty vzduchu Δt_{vz} [$^{\circ}\text{C}$]	40	26
Výkon výměníku P [W] (výpočtové oblasti)	29.2	18.9
Reálný výkon výměníku P [MW]	25.9	16.8

Výpočtová oblast reprezentuje pouze nepatrnou část výměníku. Celkem je výměník složen z 887 656 výpočtových oblastí, proto je nutné výkon výměníku ve výpočtové oblasti násobit reálným počtem výpočtových oblastí ve skutečném výměníku.

Pro názornost jsou ještě zobrazeny některé parametry na povrchu první žebrované trubky



obr. 13.12 Porovnání tepelného toku na povrchu první trubky pro čisté a zanesené trubky (výpočtové pole je zrcadleno)



obr. 13.13 Porovnání teploty v pevných stěnách první trubky pro čisté a zanesené trubky (výpočtové pole je zrcadleno)

Z výsledků je zřejmý výrazný vliv usazenin a koroze na výkon výměníku. Zmenšení výkonu je možné přičíst jednak nízké tepelné vodivosti usazení a rzi. Další výrazný vliv na výkon má také koroze žebek, která zapříčiňuje zmenšení teplosměnné plochy. Zanášení trubek má také výrazně negativní vliv na tlakovou ztrátu, která dosahuje až čtyřnásobku

projektované hodnoty. Z tohoto důvodu je v druhé části příkladu navržena náhrada žebrovaných trubek za trubky hladké.

13.4.2. Výpočet modifikovaného výměníku

Okrajové podmínky

Okrajové podmínky budou naprosto identické s předchozím případem

Tab. 13.4 Okrajové podmínky

	Hladké trubky
Objemový průtok vzduchu Q_V [$\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$]	1680000
Intenzita turbulence / [%]	20
Hydraulický průměr d_h [m]	0.1
Teplota vzduchu na vstupu t_{vz} [°C]	45
Teplota vstupní vody t_{vstup} [°C]	110
Teplota výstupní vody $t_{výstup}$ [°C]	70

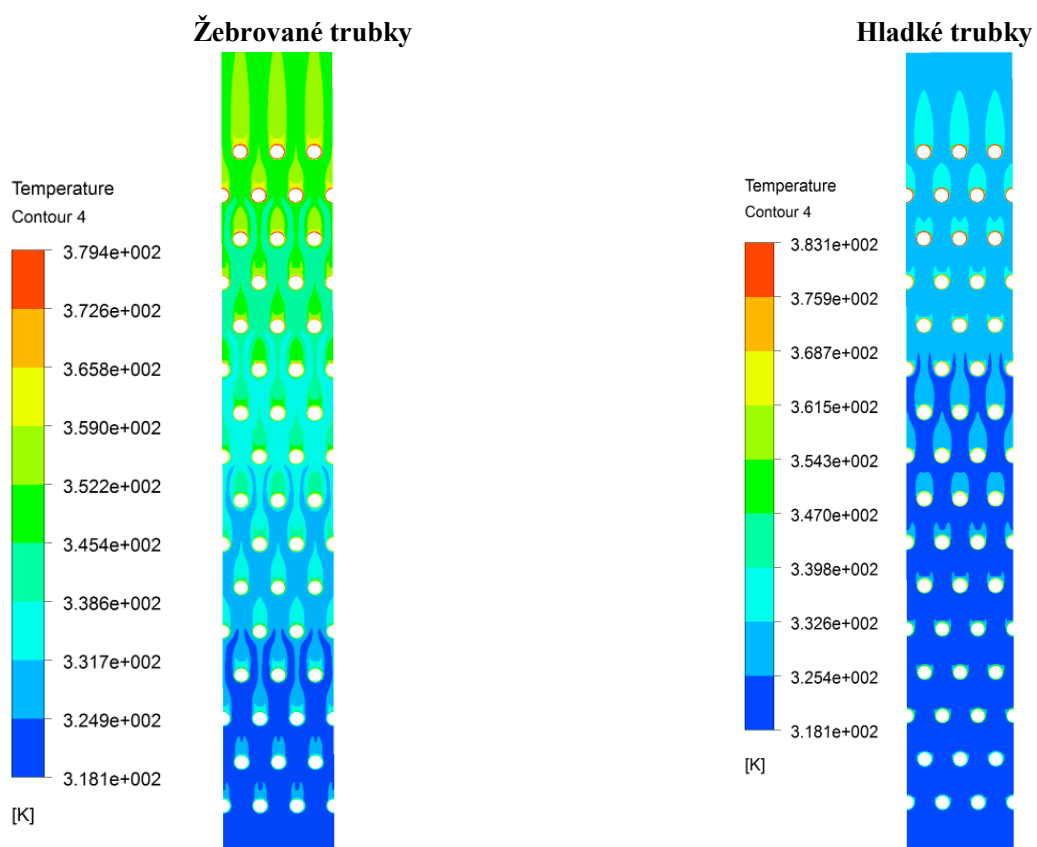
Jediná změna ve výpočtu je typ trubky, která je hladká, přičemž vnitřní a vnější průměr trubky vzhledem k žebrované trubce identická. Reynoldsovo číslo při obtékání hladkých trubek je:

$$\text{Re}_{vzduch} = \frac{v D}{\nu} = \frac{4.5 \cdot 0.036}{1.46073 \cdot 10^{-05}} = 11090$$

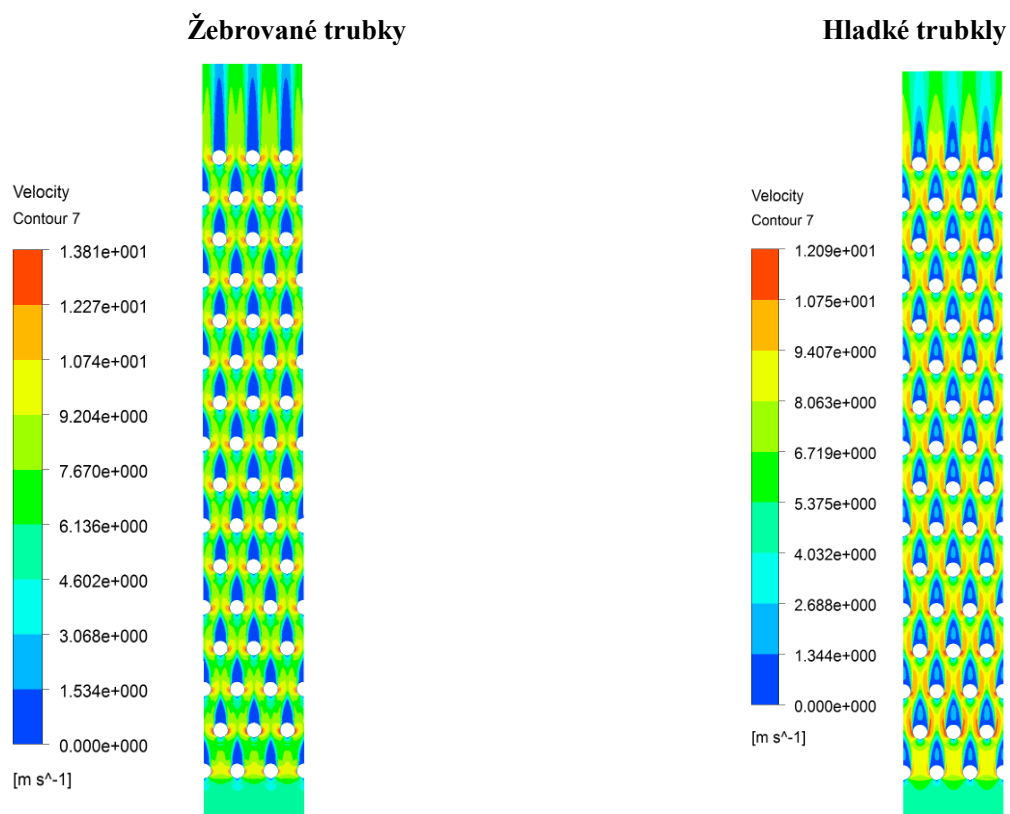
Stejně jako v případě žebrované trubky, jedná se u hladké trubky o přechodový režim proudění. Pro výpočet je tedy použit turbulence SST $k-\omega$.

Výsledky výpočtu

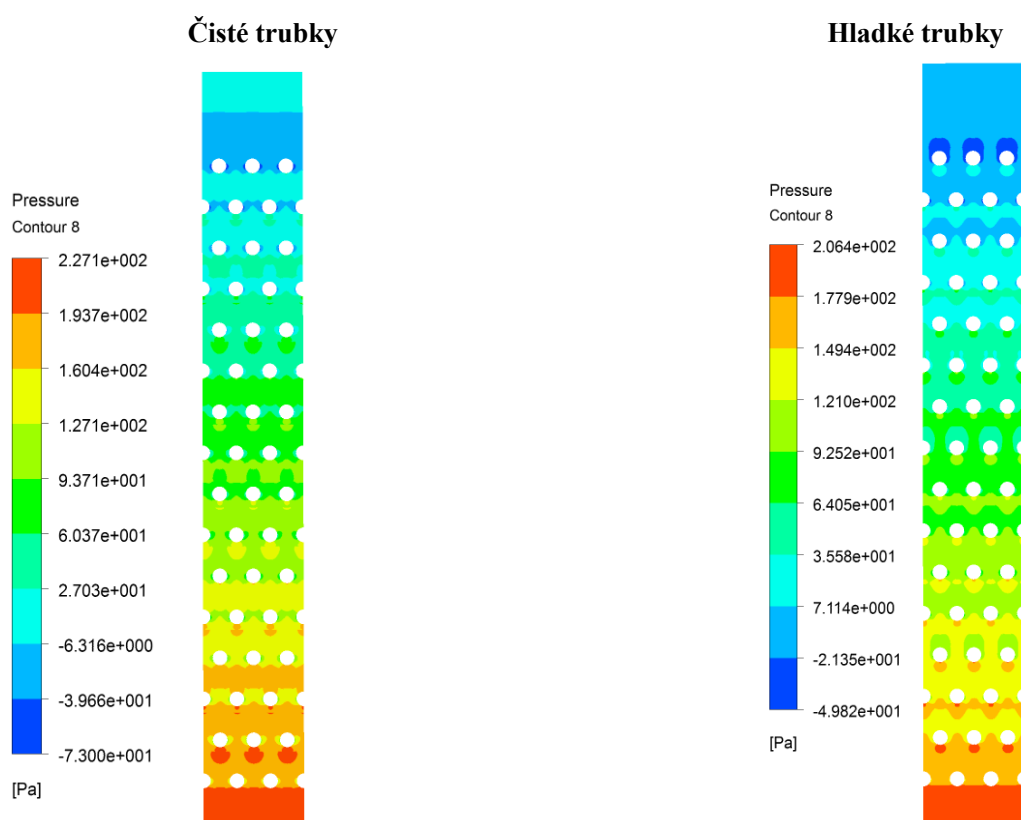
Hlavním výsledkem výpočtu je zobrazení teplotního pole ve výměníku. Dále jsou v přehledně v tabulce vyhodnoceny základní parametry výměníku. Z hlediska přehlednosti jsou grafické výstupy v postprocesoru zrcadleny a počet zobrazení je násoben. Celkem je tedy vždy zobrazena výpočtová oblast opět šestkrát.



obr. 13.14 Porovnání teploty ve výměníku pro čisté a zanesené trubky (zrcadlení)



obr. 13.15 Porovnání rychlosti ve výměníku pro čisté a zanesené trubky (zrcadlení)



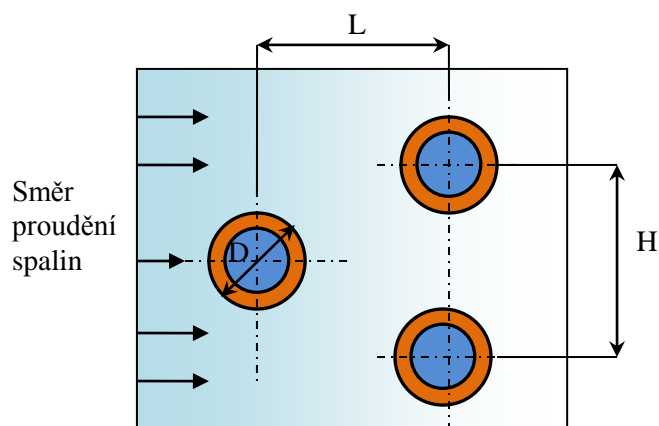
obr. 13.16 Porovnání statického tlaku ve výměníku pro čisté a zanesené trubky (výpočtové pole je zrcadleno)

Tab. 13.5 Srovnání základních parametrů přehříváku žebrované a hladké trubky

	Žebrované trubky	Hladké trubky
Objemový průtok vzduchu Q_V [$\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$]	1680000	1680000
Tlaková ztráta Δp [Pa]	277	192
Zvýšení teploty spalin Δt_{sp} [$^{\circ}\text{C}$]	40	14
Reálný výkon výměníku P [MW]	25.9	8.85

Z výsledků je zřejmé, že prostá náhrada trubek je tepelně neekvivalentní. To je způsobeno velikostí teplosměnné plochy, která je u žebrovaných trubek několikanásobně větší. Z tohoto důvodu je tedy nutné zvýšit počet trubek z původních 16 řad na 32.

Tento výpočet byl dále rozšířen o různé varianty se zahrnutím vlivu průměru trubky D , svislé rozteče H , a podélné rozteče L . Rozteč trubek, a to jak v podélném tak příčném směru, byla volena tak aby trubky vždy vyplňovaly rovnoměrně výchozí plochu, tj. rozměr jedné sekce 1587x2942x7400 mm nebyl změněn.



obr. 13.17 Označení rozteče trubek

Výsledkem výpočtu je hodnota výstupní teploty vzduchu t_{out} , která musí být minimálně 75 °C, tj. výměník musí mít teplotní diferenci Δt minimálně 30 °C. Součástí výsledků je také hodnota celkového výkonu výměníku P . Výsledky jsou přehledně zobrazeny v následující tabulce.

Tab. 13.6 Srovnání základních parametrů výměníku s hladkými trubkami pro různé varianty

D [mm]	L [mm]	H [mm]	n_L [-]	n_H [-]	n [-]	t_{out} [°C]	Δt [°C]	P [MW]
38	105.8	86.52	16	35	560	55.9	10.9	7.1
38	51.19	86.52	32	35	1120	67.6	22.6	14.6
38	51.19	57.68	32	52	1664	80.7	35.7	23.1
38	51.19	61.285	32	49	1568	78.1	33.1	21.5
38	51.19	73.542	32	41	1312	72.0	26.9	17.5
38	105.8	86.52	16	35	560	56.0	10.9	7.1
44.5	105.8	86.52	16	35	560	58.6	13.6	8.8
54	105.8	86.52	16	35	560	62.9	17.9	11.6
38	51.19	86.52	32	35	1120	67.6	22.6	14.6
44.5	51.19	86.52	32	35	1120	72.7	27.7	18.0
51	51.19	86.52	32	35	1120	77.0	32.0	20.8

Vysvětlivky:

t_{out} – výstupní teplota spalin

D – průměr trubek

L – rozteč trubek po proudu

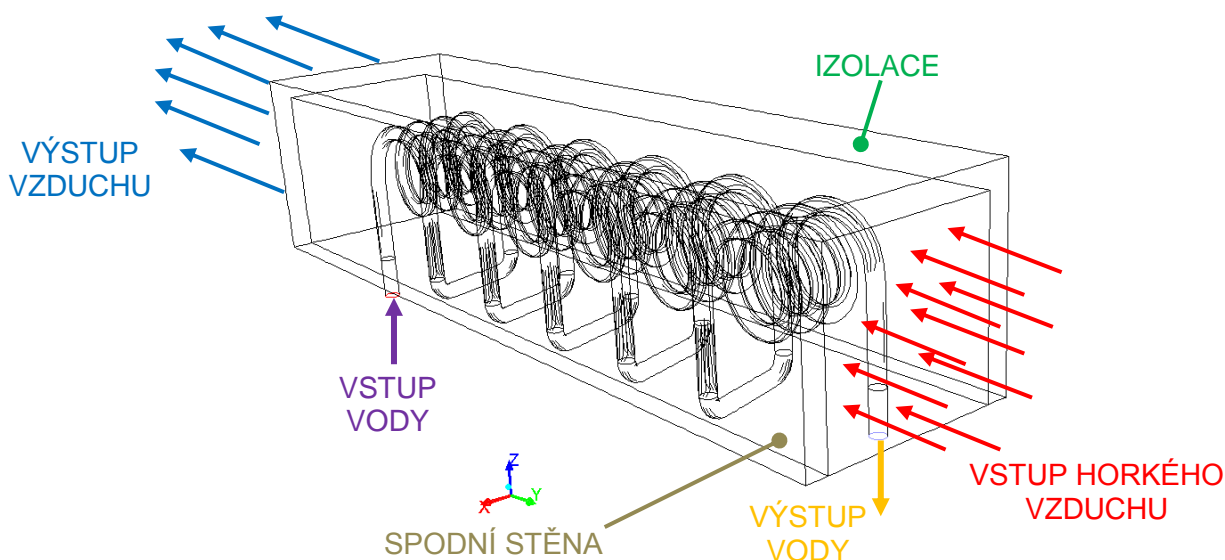
H – rozteč trubek kolmo na proud

- n_L – počet trubek po proudu
 n_H – počet trubek kolmo na proud
 n – celkový počet trubek

V tabulce jsou tučně zobrazeny varianty, které splňují podmínku minimálního teplotního spádu. Nejvyšší výkon $P = 23.1$ MW dosahuje varianta, kde každá sekce obsahuje 32 trubek kolmo a 52 trubek po proudu spalín (varianta je označena červeně). Původní sekce obsahovala 560 žebrovaných trubek. Nová varianta obsahuje v jedné sekci 1664 trubek. Z toho tedy vyplývá, že 1 metr žebrované trubky je možné nahradit ca 3 metry hladké trubky o identickém průměru. Na tento výpočet musí nutně navazovat také pevnostní výpočet, který ověří únosnost základní konstrukce výměníku, protože zvýšením počtu trubek stoupne hmotnost celého výměníku.

13.5. Výpočet spirálového souproutého a protiproudého výměníku tepla

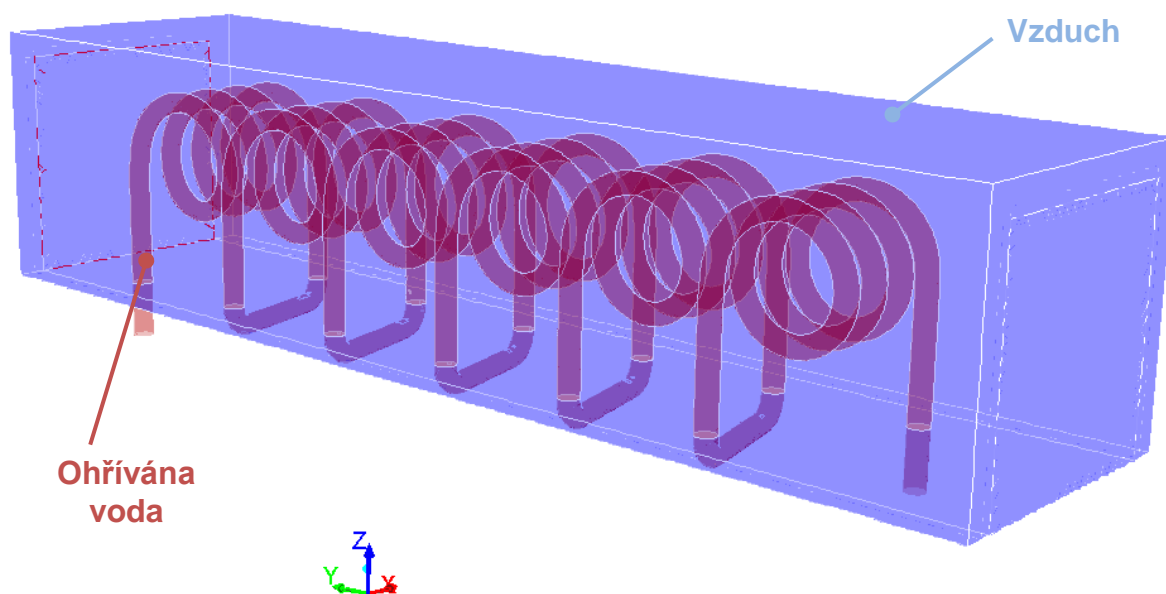
Na ilustrativním příkladu je definován metodický postup návrhu výpočtu složitého výměníku tepla (spirálový výměník tepla), kdy je zohledněn izolační materiál výměníku a skutečná tloušťka spirálové trubky výměníku. V této úloze je řešena problematika ohřevu vody horkým vzduchem. Voda proudí spirálovou trubkou, jak je patrné z obr. 13.18.



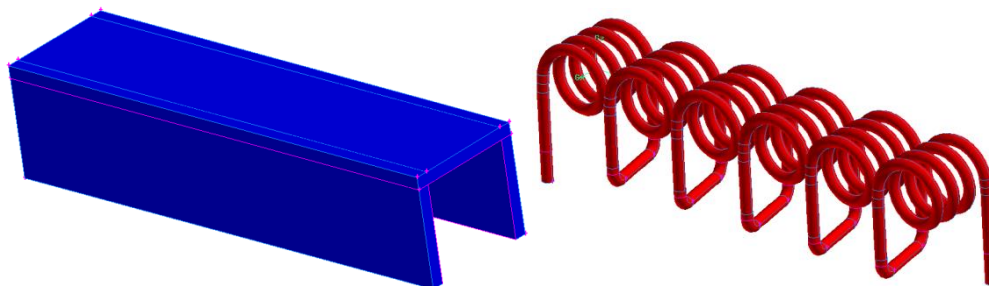
obr. 13.18 Geometrie spirálového výměníku tepla (voda-horký vzduch)

Charakteristika spirálového výměníku

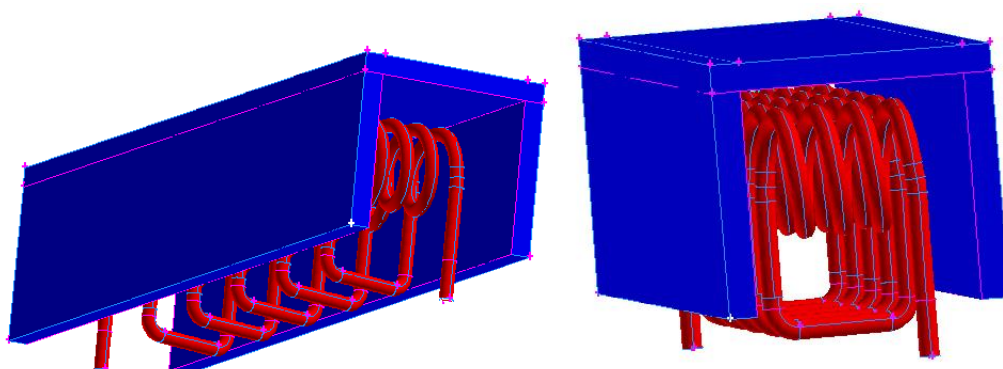
Geometrie spirálového výměníku tepla je představena na obr. 13.18, kde je patrný vstup a výstup horkého vzduchu, který proudí obdélníkovým kanálem. Následně je kanál obalen vrstvou izolačního materiálu ze třech stran (boční strany a horní strana). Spodní stěna výměníku je tvořena plechem. Uvnitř výměníku je spirálová trubka o šesti sekcích, kterou proudí voda. Z obr. 13.18 je patrný vstup a výstup vody do spirálové trubky výměníku. Z charakteru umístění jednotlivých vstupů a výstupů horkého vzduchu a vody je zřejmé, že se jedná o protiproudý výměník. Ovšem při podrobné analýze je patrné, že při proudění vody jednotlivými spirálovými smyčkami se výměník chová jako souproudý i protiproudý výměník. Také orientace proudění vody může být opačná, bude se tedy jednat o protiproudý výměník a bude také řešen. Spodní stěna výměníku není opatřena izolací s důvodu, že jednotlivé sekce spirálové trubky jsou propojeny mimo výměník, jak je patrné z obr. 13.21. Dále na obr. 13.20 je schématické znázornění ohřívání a chlazení kapaliny. Ohřívanou kapalinou je v tomto případě voda (tzn. tmavě červená barva) a chladič kapalinou je horký vzduch, který je znázorněn světle modrou barvou.



obr. 13.19 Znázornění oblasti proudící vody a horkého vzduchu ve spirálovém výměníku tepla



obr. 13.20 Model izolace a spirálové trubky výměníku tepla



obr. 13.21 Umístění spirálové trubky ve výměníku tepla včetně izolace

13.5.1. Transportní rovnice pro přenos příměsí

Úloha je nadefinována jako proudění směsi plynů, tedy matematický model pro laminární nebo turbulentní proudění s rovnicí energie bude navíc obsahovat rovnici pro hmotnostní zlomky příměsí.

Bilanční rovnice přenosu příměsí $Y_{i'}$ (tj. hmotnostního zlomku) v konzervativní formě má tvar [24], [28]

$$\frac{\partial(\rho Y_{i'})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}_j Y_{i'}) = -\nabla \cdot \mathbf{J}_{i'} + R_{i'} + S_{i'} \quad (13.5.1)$$

kde na pravé straně je $R_{i'}$ rychlost produkce příměsí i' vlivem chemické reakce a $S_{i'}$ rychlost tvorby přírůstku z distribuované příměsí [1]. Výše uvedená rovnice platí pro $N-1$ příměsí, kde N je úplný počet komponent prezentovaných v matematickém modelu. Distribuce příměsí může být realizována za různých podmínek, obecně lze rozlišovat distribuci za laminárního nebo turbulentního proudění [24]. $J_{i'}$ představuje difúzní tok i' -té komponenty směsi, který se liší pro laminární a turbulentní proudění.

Difúzní tok pro laminární proudění

V předchozí rovnici $J_{i'}$ představuje difúzní tok i' -té složky jednotkou plochy, který je definovaný vztahem

$$J_{i'} = -\rho D_{i',m} \nabla Y_{i'} \quad [\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}] \quad (13.5.2)$$

kde $D_{i',m}$ je difúzní koeficient i' -té příměsi ve směsi.

Difúzní tok pro turbulentní proudění

Při turbulentním proudění pro vyjádření difúzního toku jednotkou plochy i' -té složky se uplatňuje vztah

$$J_{i'} = -\left(\rho D_{i',m} + \frac{\mu_t}{Sc_t}\right) \nabla Y_{i'} \quad [\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}] \quad (13.5.3)$$

kde Sc_t je Schmidtovo turbulentní číslo, jehož hodnota je 0,7.

Hmotnostní zlomek příměsi je definován vztahem

$$Y_{i'} = \frac{m_{i'}}{m} = \frac{\rho_{i'} V_{i'}}{\rho V} = \frac{\rho_{i'}}{\rho} \alpha_{i'} \quad (13.5.4)$$

kde	$m_{i'}$ [kg]	hmotnost příměsi i'
	m [kg]	celková hmotnost směsi
	$Y_{i'}$ [1]	hmotnostní zlomek příměsi i' ve směsi
	$\alpha_{i'}$ [1]	objemový zlomek příměsi i' ve směsi

Další veličina, která se užívá se spojením s šířením příměsi je molární koncentrace $C_{i'}$ [$\text{kmol}\cdot\text{m}^{-3}$]. Koncentrace definovaná vztahem $M_{i'} C_{i'}$ je uváděna v jednotkách [$\text{kg}\cdot\text{kmol}^{-1}\cdot\text{m}^{-3}=\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$]. Označení ppm, běžné při vyhodnocování koncentrací, definuje miliontinu dané hodnoty (analogie procenta, může se vztahovat k hmotnostnímu nebo objemovému zlomku).

13.5.2. Fyzikální vlastnosti směsi plynů, vody a pevných materiálů

Výsledný matematický model výměníku tepla obsahuje proudění vody (H_2O) a plynné směsi vzduchu, přitom plynná směs vzduchu má obvyklé složení (CO_2 , O_2 , N_2 , H_2O) v různém poměru, především obsah páry ve vzduchu se bude měnit. Na základě toho je nutné definovat bilanční rovnici pro hmotnostní zlomky plynných složek vzduchu. Z hlediska charakteristiky problematiky proudění a výpočtu přestupu tepla se definuje proudění stlačitelných tekutin, tzn. výpočet hustoty plynné směsi vzduchu je definován pomocí stavové

rovnice pro ideální plyn. Zbylé fyzikální vlastnosti směsi (viskozita, měrná tepelná kapacita a tepelná vodivost) jsou definovány pomocí níže uvedených vztahů.

Pro stlačitelné proudění je **hustota** definována podle stavové rovnice ideálního plynu [1] :

$$\rho = \frac{\rho_{op} + \rho}{RT \sum_{i'} \frac{Y_{i'}}{M_{i'}}} \quad (13.5.1)$$

kde ρ_{op} je operační tlak, R je univerzální plynová konstanta a kde $M_{i'}$ je molekulová váha příměsi i' ve směsi.

Kinematická viskozita směsí jednotlivých plynů je určena vztahem:

$$\mu = \sum_{i'} \frac{X_{i'} \cdot \mu_{i'}}{\sum_{j'} X_{j'} \frac{\left[1 + \left(\frac{\mu_{j'}}{\mu_{i'}} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{M_{j'}}{M_{i'}} \right)^{1/4} \right]^2}{\left[8 \cdot \left(1 + \frac{M_{j'}}{M_{i'}} \right) \right]^{1/2}}} \quad (13.5.2)$$

kde $X_{i'}$ je molový zlomek příměsi i' (počet molů příměsi v jednom molu směsi).

Měrná tepelná kapacita směsí je dána vztahem:

$$c_p = \sum_{i'} Y_{i'} c_{p,i'} \quad (13.5.3)$$

Tepelná vodivost směsi je dána vztahem:

$$\lambda = \sum_{i'} \frac{X_{i'} \cdot \lambda_{i'}}{\sum_{j'} X_{j'} \frac{\left[1 + \left(\frac{\lambda_{j'}}{\lambda_{i'}} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{M_{j'}}{M_{i'}} \right)^{1/4} \right]^2}{\left[8 \cdot \left(1 + \frac{M_{j'}}{M_{i'}} \right) \right]^{1/2}}} \quad (13.5.4)$$

V případě vody hustotu definujeme po částech lineární funkcí:

$$\rho_i(T) = \rho_{i,n} + \frac{\rho_{i,n+1} - \rho_{i,n}}{T_{n+1} - T_n} (T - T_n) \quad (13.5.5)$$

Stejnou funkční závislostí (po částech lineární funkcí) se definuje kinematická viskozita, měrná tepelná kapacita a tepelná vodivost vody.

Dále se definují fyzikální vlastnosti pro izolaci, stěnu spirálové trubky a spodní stěnu výměníku. Jako materiál spirálové trubky bývá často používána měď s ohledem na velmi dobré vlastnosti z hlediska vedení tepla, a spodní stěna výměníku je vyrobena z oceli. Definované fyzikální vlastností pevných materiálů jsou hustota, měrná tepelná kapacita a

tepelná vodivost. Hodnoty fyzikálních vlastností lze definovat jako konstantní hodnoty nebo funkčními závislostmi na teplotě. Zejména je vhodné definovat tepelnou vodivost jako funkci teploty. Odpovídající hodnoty lze získat z materiálových listů, tabulek a databáze Fluentu.

13.5.3. Spirálový souproudý výměník tepla – ohřev vody vzduchem

První varianta výpočtu se týká souproudého výměníku, kde orientace proudění je dána okrajovými podmínkami.

Průtočné okrajové podmínky

Na jednotlivých hranicích výpočetního modelu výměníku musí být definovány odpovídající okrajové podmínky pro vstup a výstup pro vodu a vzduch. Použité typy okrajové podmínky jsou následující:

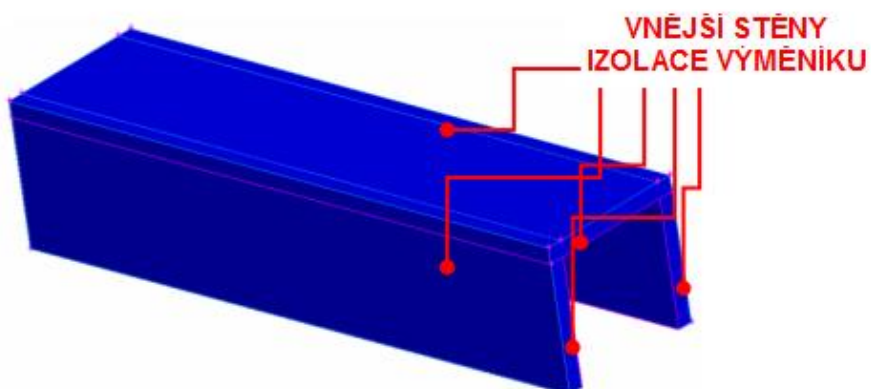
Tab. 13.7 Průtočné okrajové podmínky

	Vzduch	Voda
Vstup	hmot. průtok spalin Q_m [kg·s ⁻¹] hmotnostní zlomky příměsí Y_i [1] totální teplota T [K]	hmot. průtok spalin Q_m [kg·s ⁻¹] totální teplota T [K]
Výstup	přetlak p_p [Pa] statická teplota pro zpět. proudění T [K]	přetlak p_p [Pa] statická teplota pro zpět. proudění T [K]

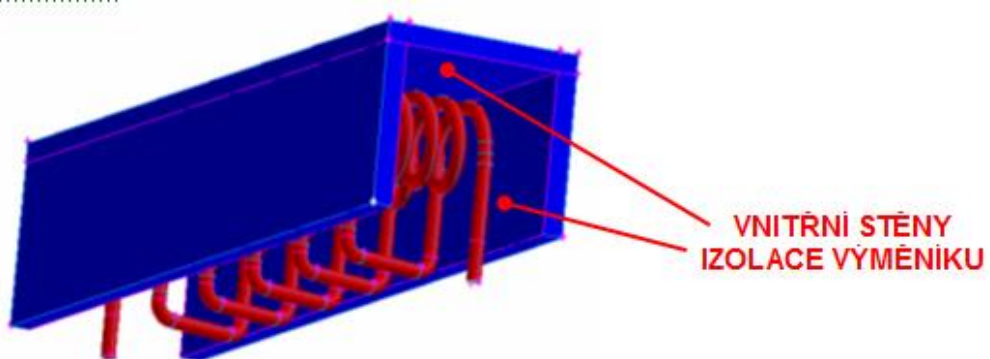
Okrajové podmínky jednotlivých stěn ("wall") výměníku

Stěny výměníku se liší svou polohou vůči okolí a protékanému médiu a budou specifikovány jako vnější stěny izolace výměníku, vnitřní stěny izolace výměníku, a stěna spirály uvnitř proudění vzduchu a vně.

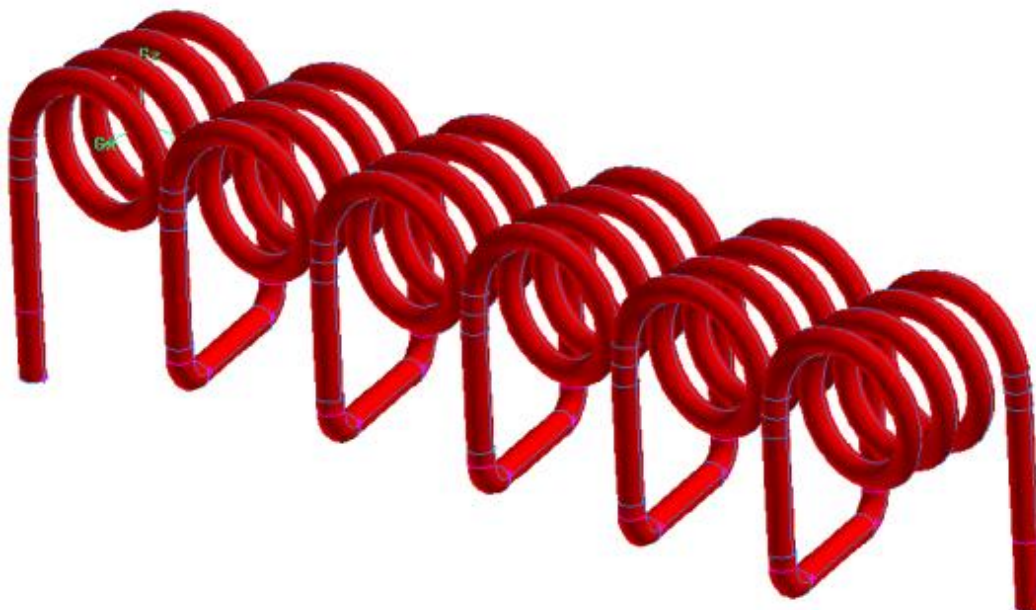
Vnější stěna izolace	izolovaná stěna	nulová hodnota hustoty tepelného toku
Vnitřní stěna izolace	počítá se přestup tepla	„Coupled“ podmínka
Stěna spirálové trubky – tenká stěna	počítá se přestup tepla, tloušťkou stěny se uvažuje tepelný odpor	„Coupled“ podmínka
Dolní část stěny spirálové trubky – tenká stěna	Teplota tloušťkou stěny se uvažuje tepelný odpor	



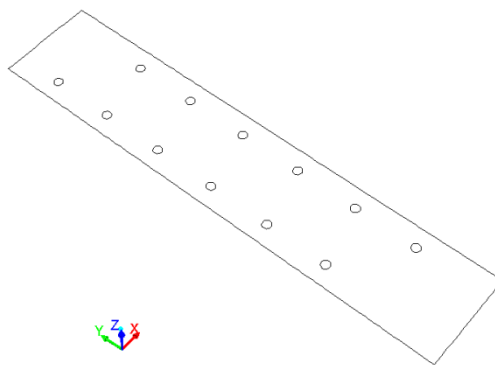
obr. 13.22 Specifikace vnitřních stěn izolace výměníku



obr. 13.23 Specifikace vnitřních stěn izolace výměníku



obr. 13.24 Spirálová trubka výměníku



obr. 13.25 Spodní stěna výměníku

Zóny

Ve spirálovém výměníku tepla jsou definovány tři zóny (oblasti). Dvě oblasti jsou typu „Fluid“. Jedná se o oblast proudění plynné směsi vzduchu a oblast proudění vody. Třetí oblast je typu „Solid“ (pevný materiál). Pevným materiálem je izolace výměníku tepla.

Matematický model

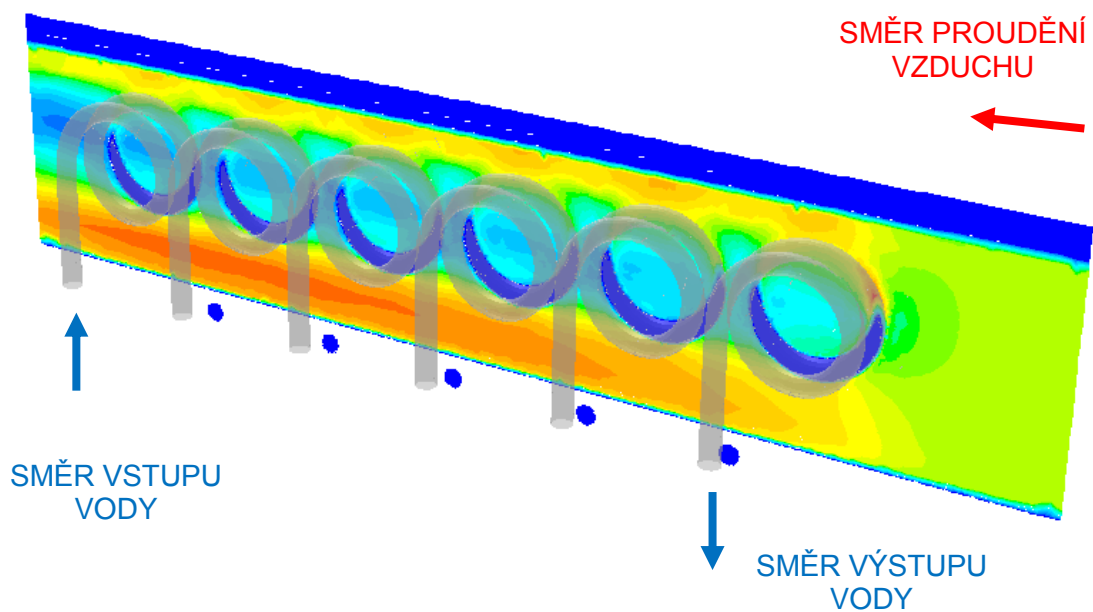
Na základě charakteristiky problematiky proudění vzduchu a vody ve výměníku tepla je definován turbulentní standard $k-\omega$ model s přestupem tepla, navíc zde přistupují rovnice pro příměsi.

Výsledný model výměníku tepla lze charakterizovat jako 3D turbulentní stacionární matematický model proudění plynné směsi a vody s přestupem tepla a proudění je uvažováno jako stlačitelné. Proudící vzduch výměníkem tepla může být složen z (CO_2 , H_2O , N_2 , O_2). Výpočet hustoty vzduchu je definován pomocí stavové rovnice pro stlačitelný plyn. Další fyzikální vlastnosti (viskozita, měrná tepelná kapacita, tepelná vodivost) plynné směsi jsou definovány pomocí směšovacích zákonů.

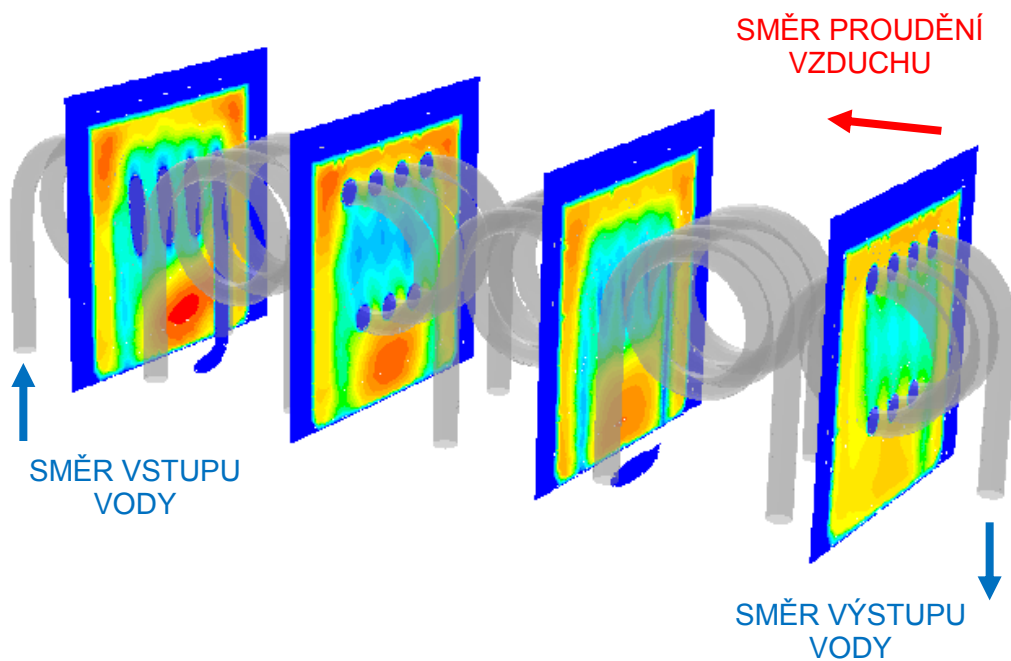
S ohledem na výpočet přestupu tepla ze vzduchu stěnou spirálové trubky do proudící vody je uvažována skutečná tloušťka stěny trubky včetně fyzikálních vlastností materiálu stěny. Dále v modelu výměníku tepla je uvažována izolační vrstva materiálu opět s definovanými fyzikálními vlastnostmi (hustota, měrná tepelná kapacita, tepelná vodivost).

Vyhodnocení

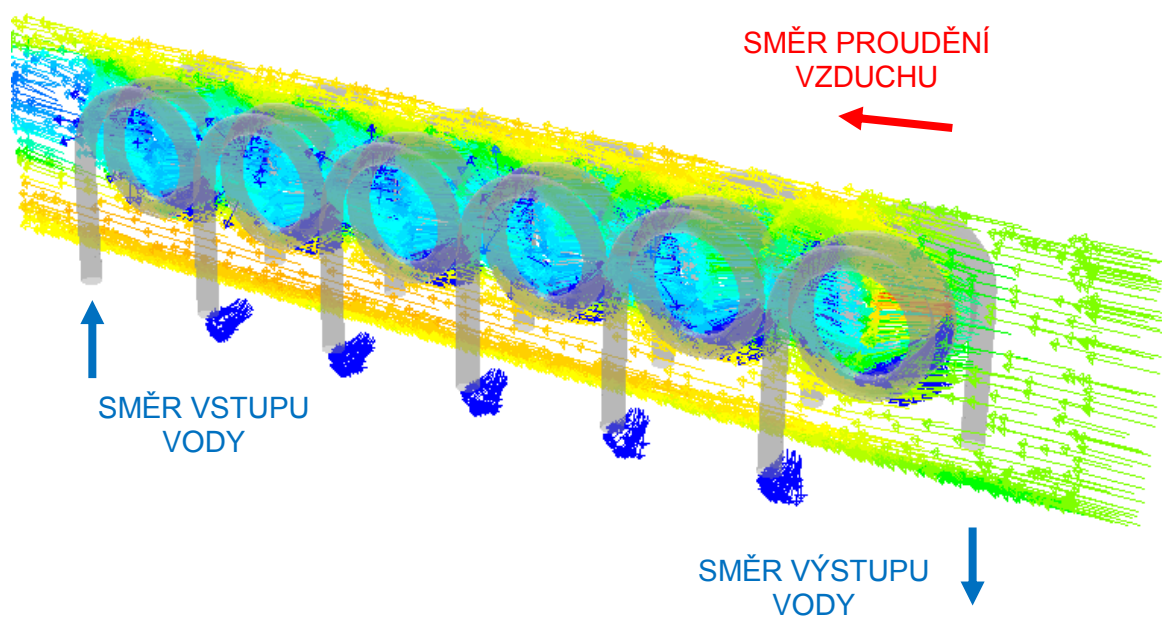
Výsledky numerické simulace proudění vody a vzduchu ve výměníku tepla pro tepelný výkon $P=30$ kW jsou vyhodnoceny pomocí vyplněných kontur rychlosti a teplot a vektorů rychlosti v podélných a příčných rovinách výměníkem. Následně jsou vyhodnocené další veličiny (teplota stěny spirálové trubky, součinitel přestupu tepla ze stěny do vody a horkého vzduchu, trajektorie proudících médií, úbytek tlaku proudící vody a průběh ohřevu vody v spirálové trubce).



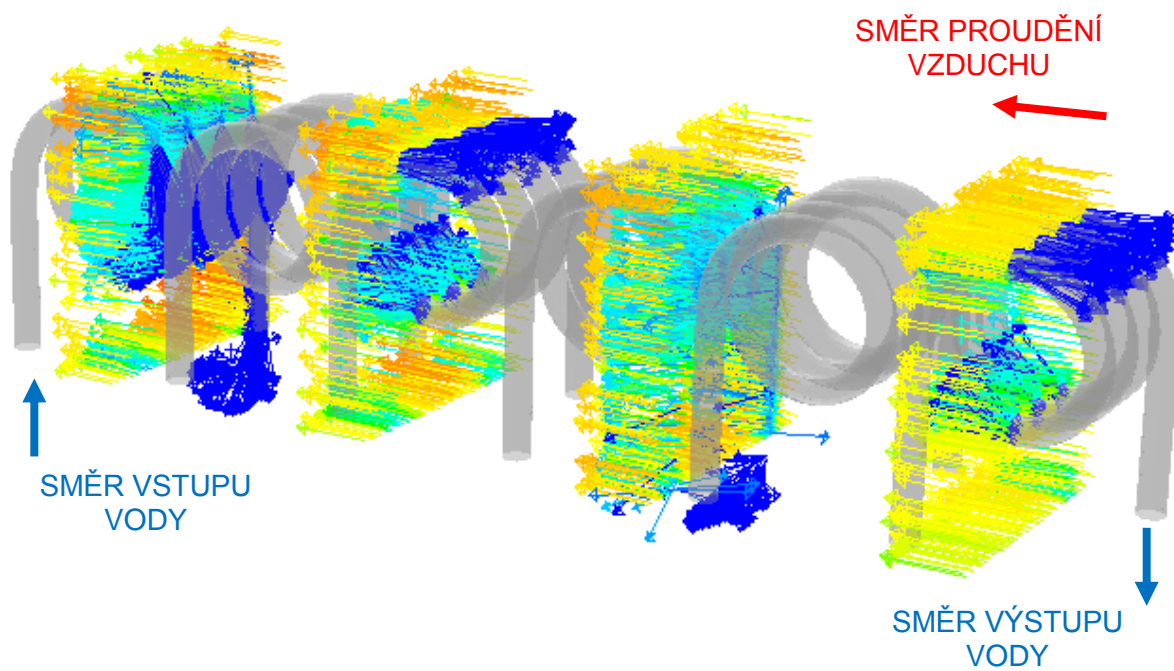
obr. 13.26 Kontury velikosti rychlosti v podélném řezu výměníkem tepla (středem oblasti)



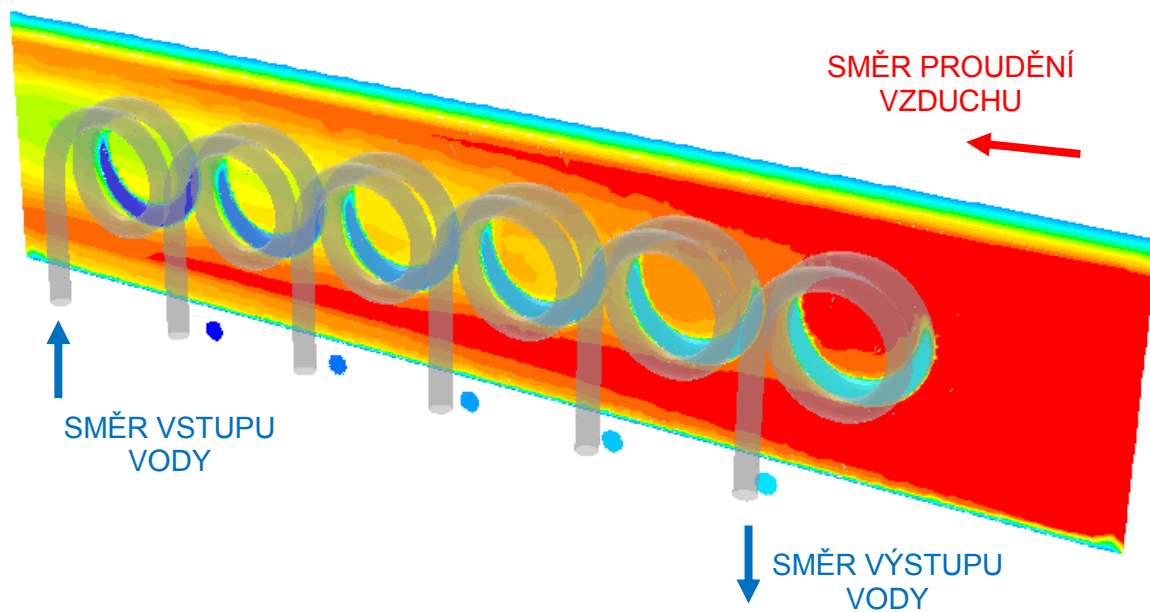
obr. 13.27 Kontury velikosti rychlosti v příčných řezech výměníkem tepla



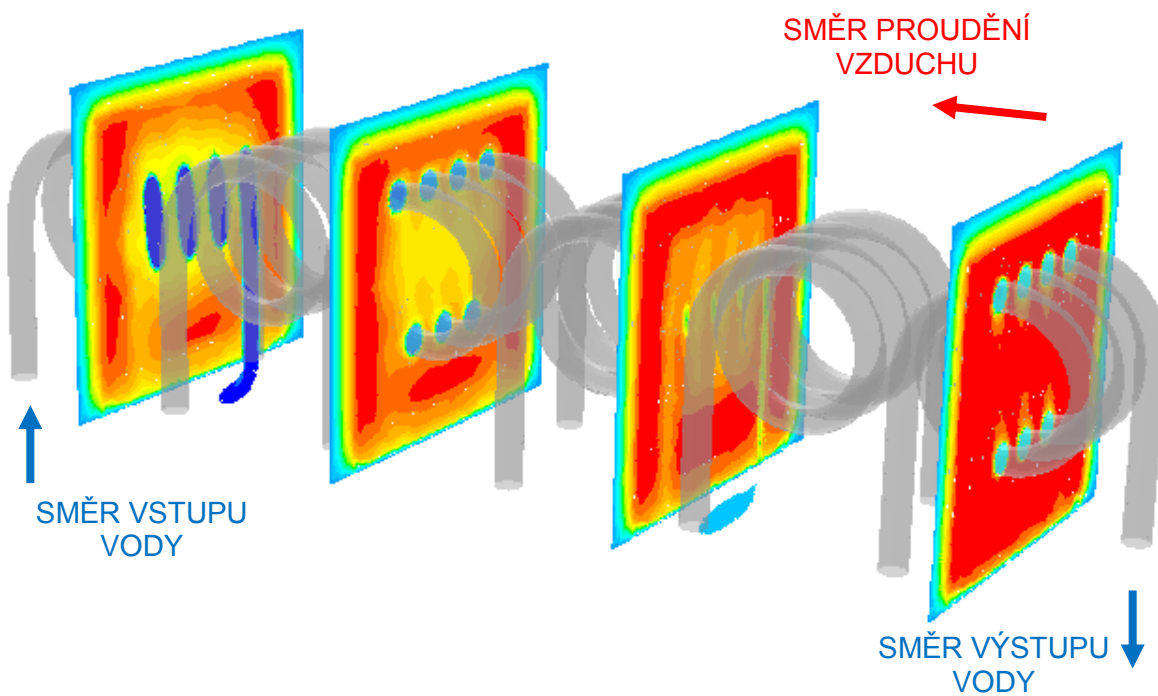
obr. 13.28 Vektory rychlosti v podélném řezu výměníkem tepla (středem oblasti)



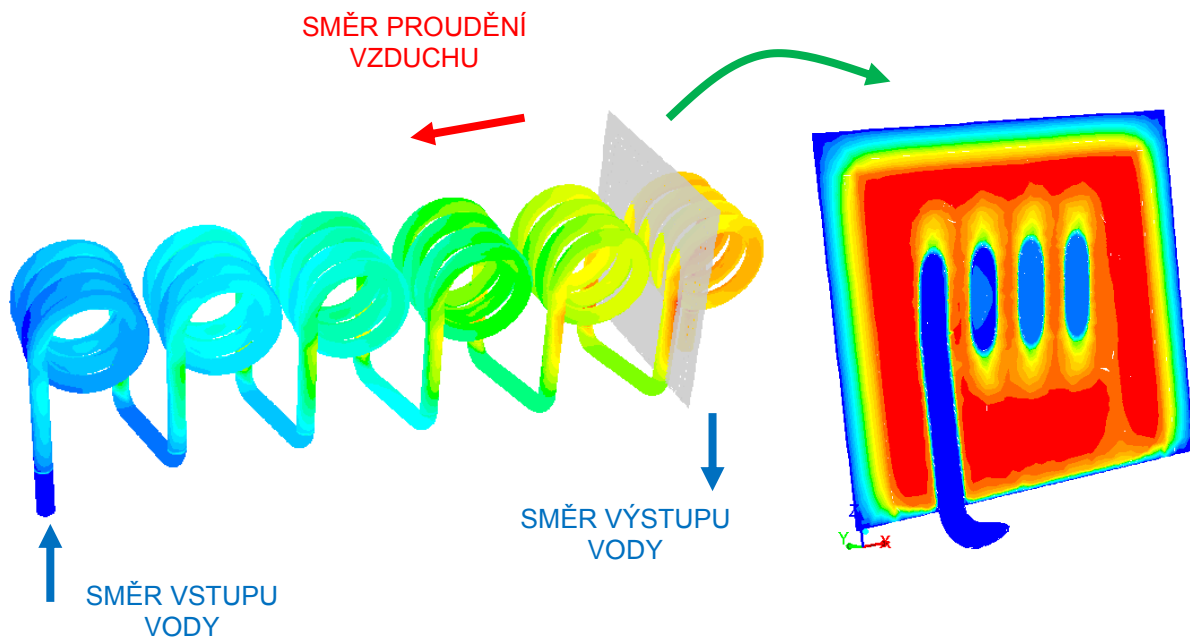
obr. 13.29 Vektory rychlosti v příčných řezech výměníkem tepla



obr. 13.30 Teplotní pole v podélném řezu výměníkem tepla (středem oblasti)

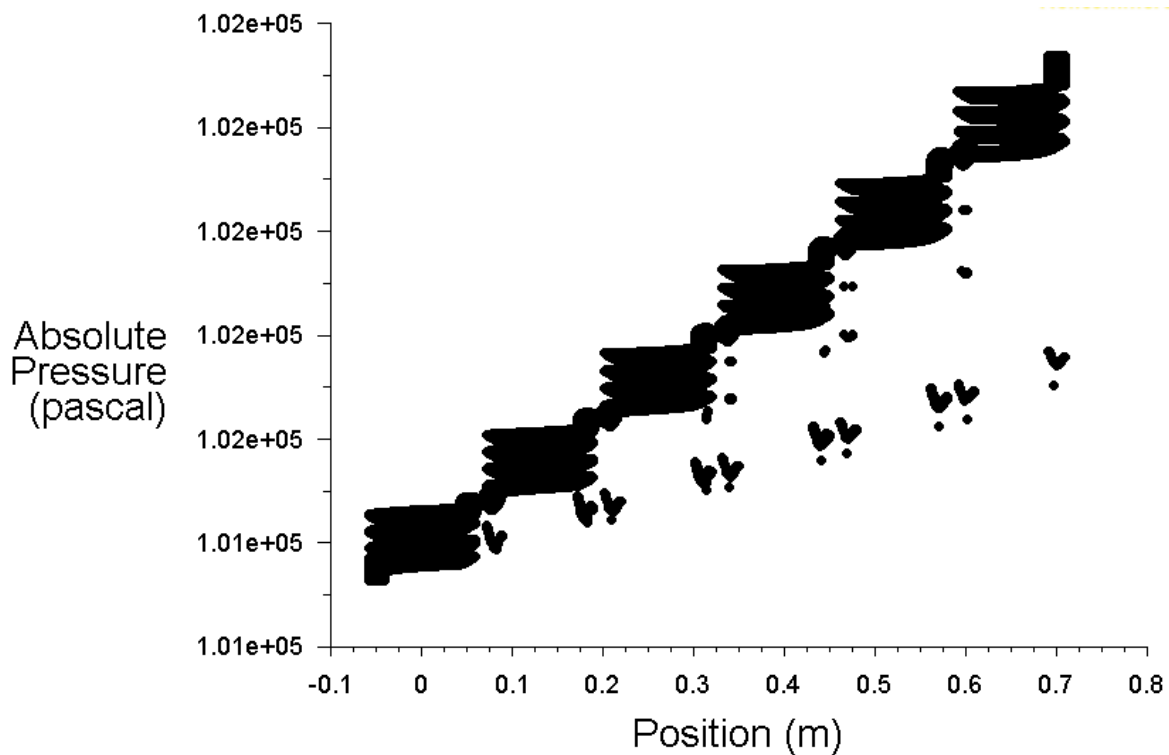


obr. 13.31 Teplotní pole v příčných řezech výměníkem tepla

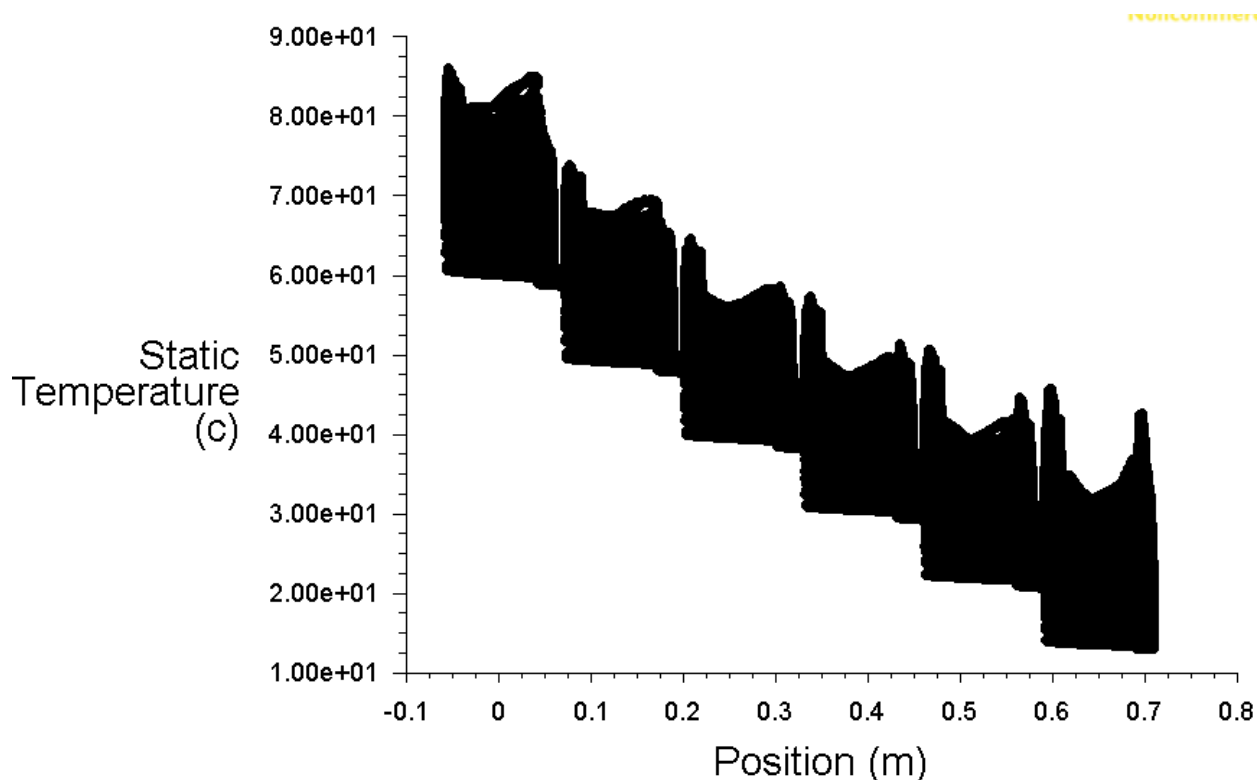


obr. 13.32 Teplota stěny spirálové trubky

obr. 13.33 Teplota v příčném řezu oblasti proudění vody a vzduchu



obr. 13.34 Průběh absolutního tlaku proudící vody spirálovou trubkou výměníku tepla



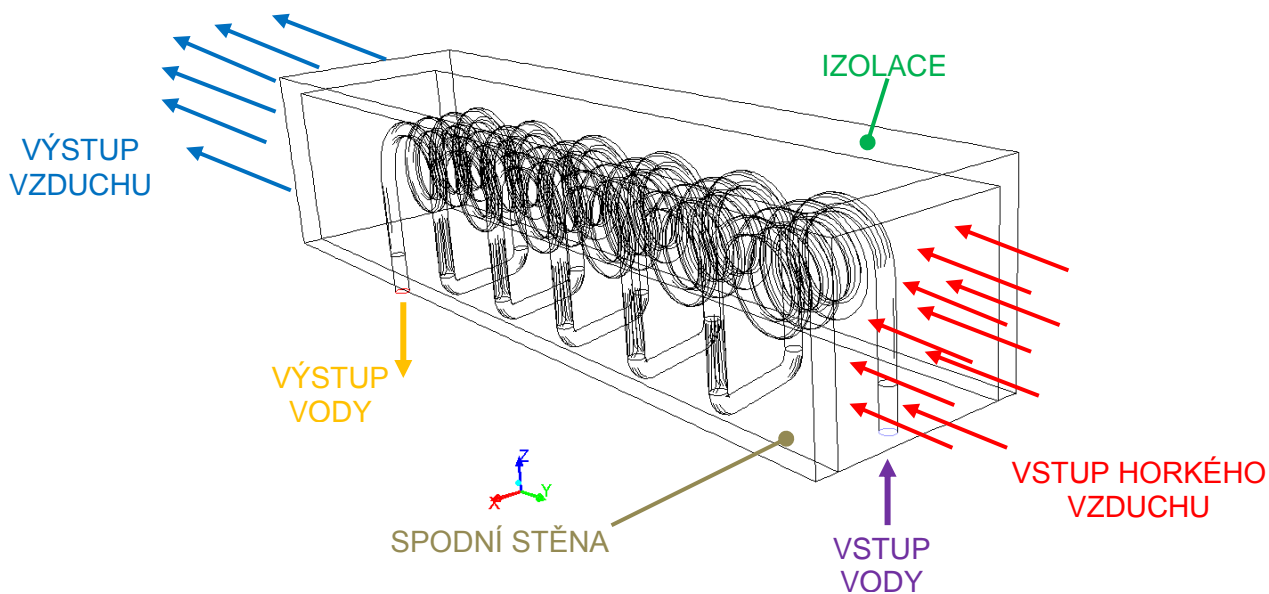
obr. 13.35 Průběh teploty proudící vody spirálovou trubicí výměníku tepla

13.5.4. Spirálový souproudý výměník tepla – ohřev vody vzduchem

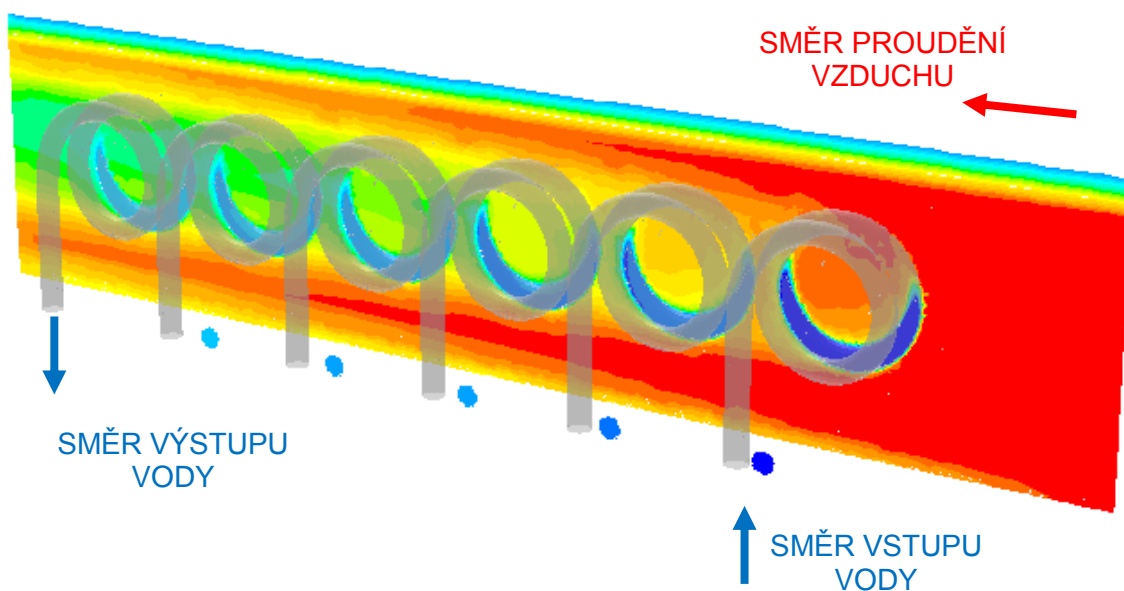
Charakteristika spirálového výměníku tepla je totožná s popisem v příkladu 13.5. Stejně typy okrajových podmínek na jednotlivých hranicích byly definovány, a stejně tak byly definovány i stejné hodnoty vstupních okrajových podmínek. Odlišnost v porovnání s původní variantou je v tom, že došlo k výměně okrajových podmínek pro vodu (tzn. záměna vstupní okrajové podmínky za výstupní okrajovou podmínku), tak aby bylo zajištěno souproudé řešení spirálového výměníku tepla, viz obr. 13.36.

Vyhodnocení

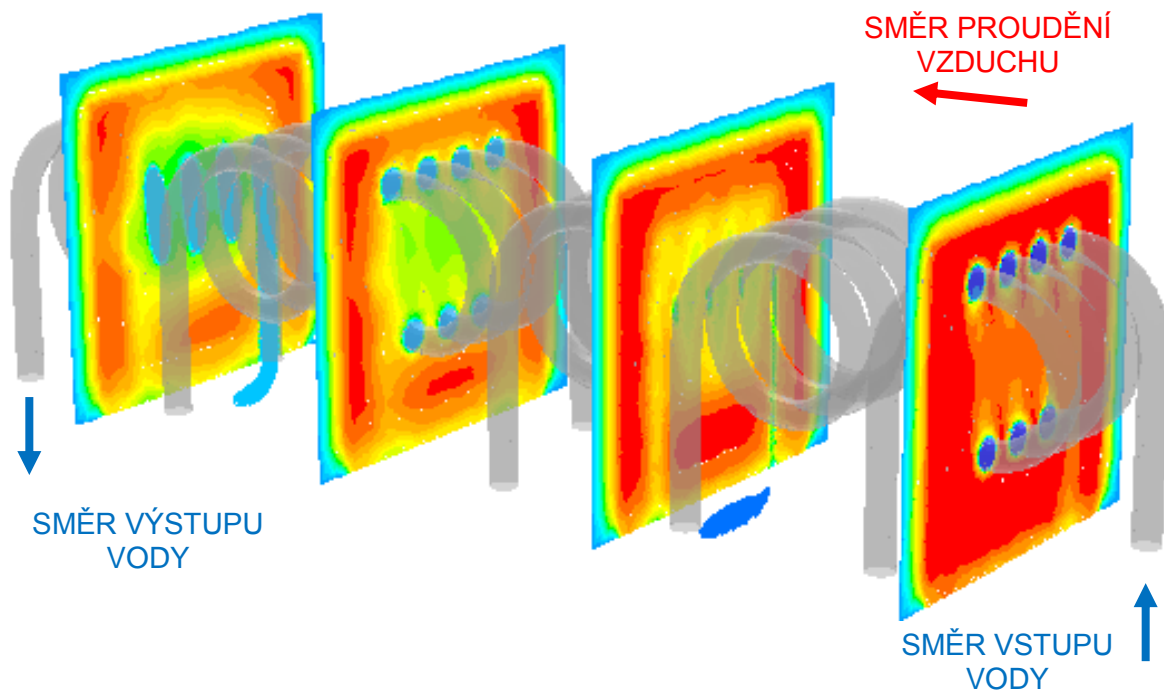
Výsledky numerické simulace proudění vody a horkého vzduchu ve výměníku tepla jsou vyhodnoceny pomocí vyplněných kontur teplot. Následně je vyhodnocena teplota stěny spirálové trubky.



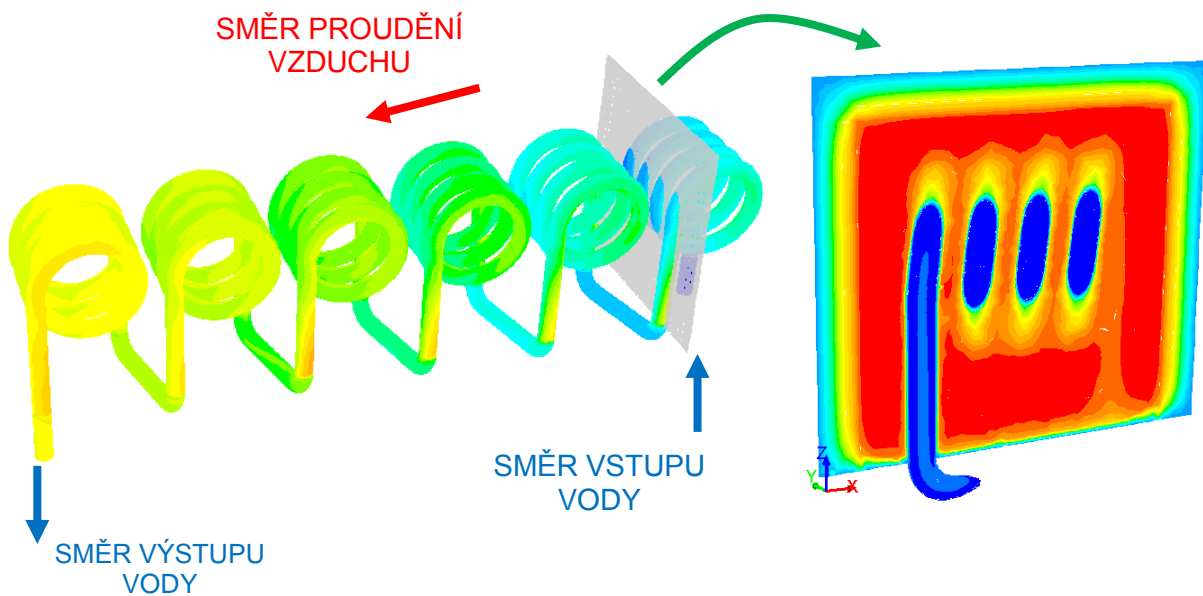
obr. 13.36 Geometrie souproudého spirálového výměníku tepla (voda-horký vzduch)



obr. 13.37 Teplotní pole v podélném řezu výměníkem tepla



obr. 13.38 Teplotní pole v příčných řezech výměníkem tepla

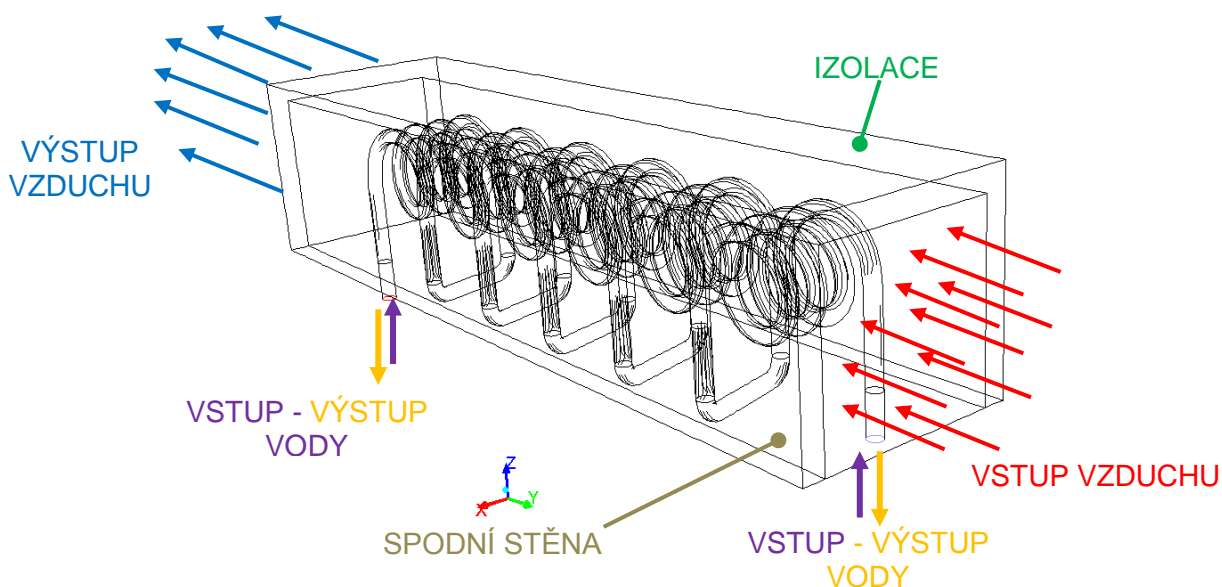


obr. 13.39 Teplota stěny spirálové trubky

obr. 13.40 Teplota v příčném řezu oblasti proudění vody a vzduchu

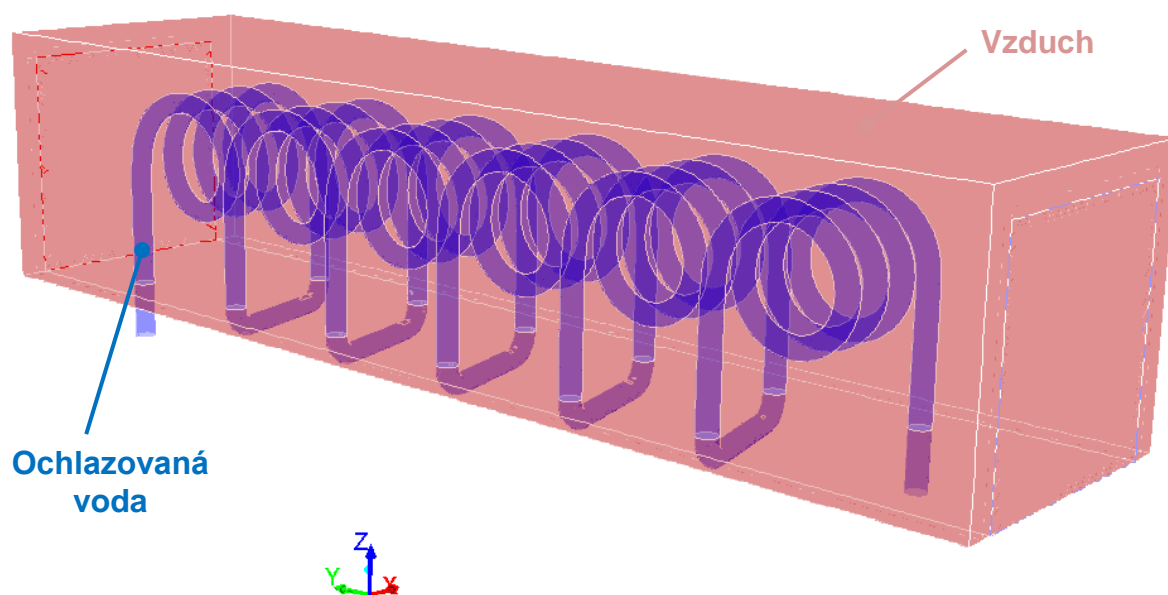
13.5.5. Protiproudý a souproudý spirálový výměník tepla k ochlazování vody vzduchem

V této úloze je řešena problematika ochlazování vody, která proudí spirálovou trubicí, jak je patrné z obr. 13.41. Voda je ve výměníku ochlazována proudícím vzduchem, který vstupuje do oblasti skrz čtvercový průřez. Výměník je v tomto případě řešen jako protiproudý a jako souproudý. Protiproudým uspořádáním je situace, kdy voda vstupuje v oblasti výstupu vzduchu a vystupuje v oblasti vstupu vzduchu do výměníku (fialová barva šipek ve schématu). Voda tedy proudí proti směru proudění vzduchu. Souproudé uspořádání je opačné ve srovnání s protiproudým uspořádáním (voda vstupuje v oblasti vstupu vzduchu a vystupuje v oblasti výstupu vzduchu – žlutá barva šipek ve schématu). Z charakteru proudění vody jednotlivými spirálovými sekcemi ovšem nelze definovat, že se jedná výhradně o souproudé nebo protiproudé uspořádání, protože voda při průtoku spirálovou smyčkou se v části své dráhy pohybuje ve směru nebo proti směru proudícího vzduchu, jak je patrné z obr. 13.41. V této aplikaci jsou všechny okolní stěny výměníku definovány jako izolované, a tedy nedochází k úniku tepla do okolí. Zároveň i stěna spirálové trubky, která se nachází mimo oblast výměníku (tzn. jednotlivé propoje spirálových sekcí) je definována jako izolovaná.



obr. 13.41 Schéma protiproudého a souproudého výměníku tepla k ochlazování vody

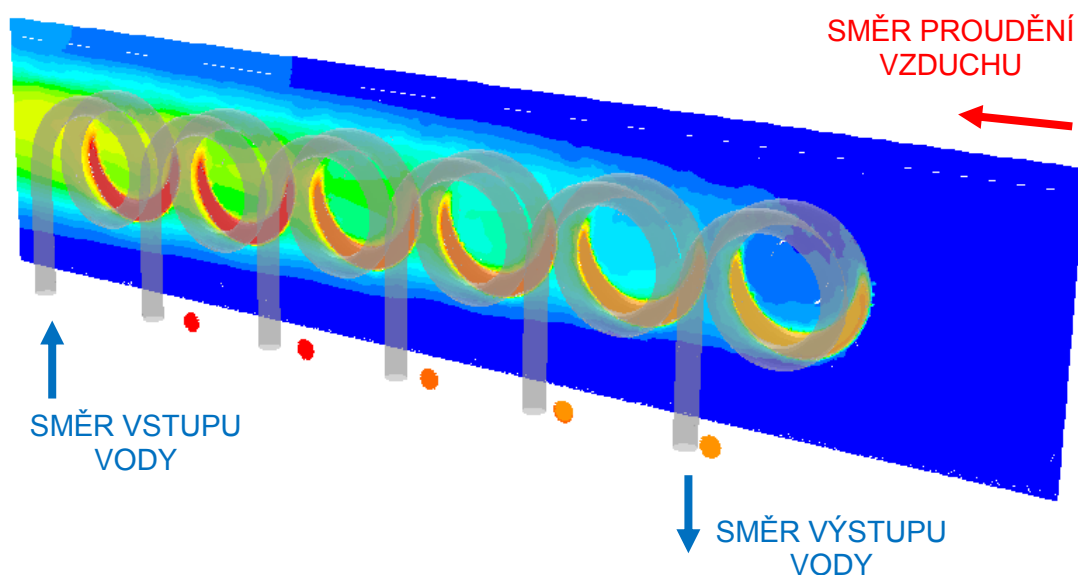
Oblast proudění ochlazované vody spirálou je zachycena tmavou barvou a oblast proudění vzduchu je představena světlou barvou, viz obr. 13.42.



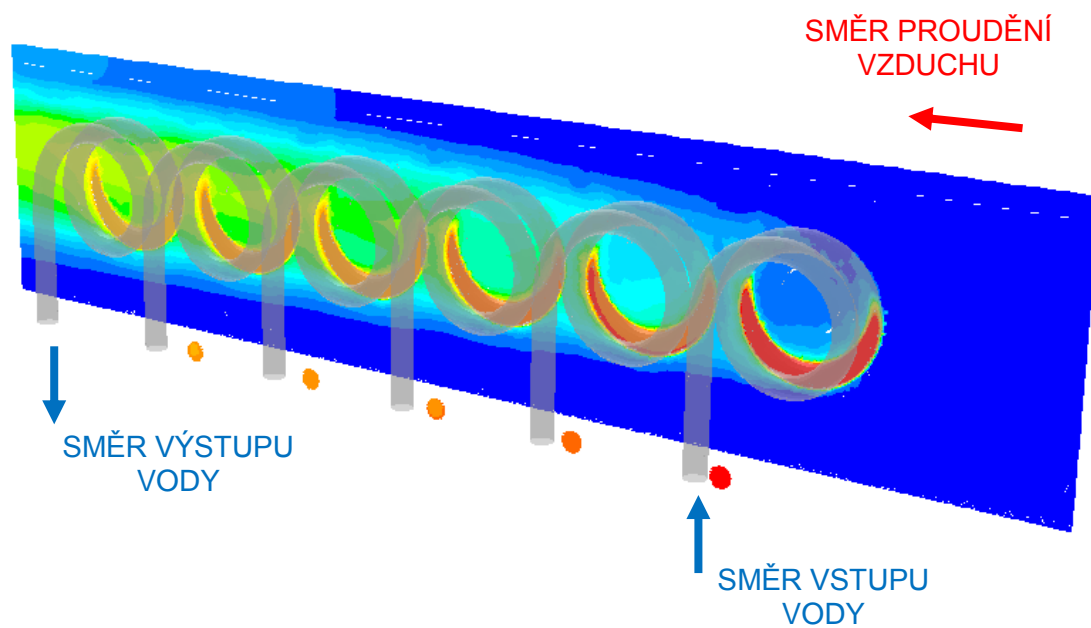
obr. 13.42 Oblast proudění ochlazované vody (tmavá barva) a vzduchu (světlá barva) ve spirálovém výměníku tepla

Vyhodnocení

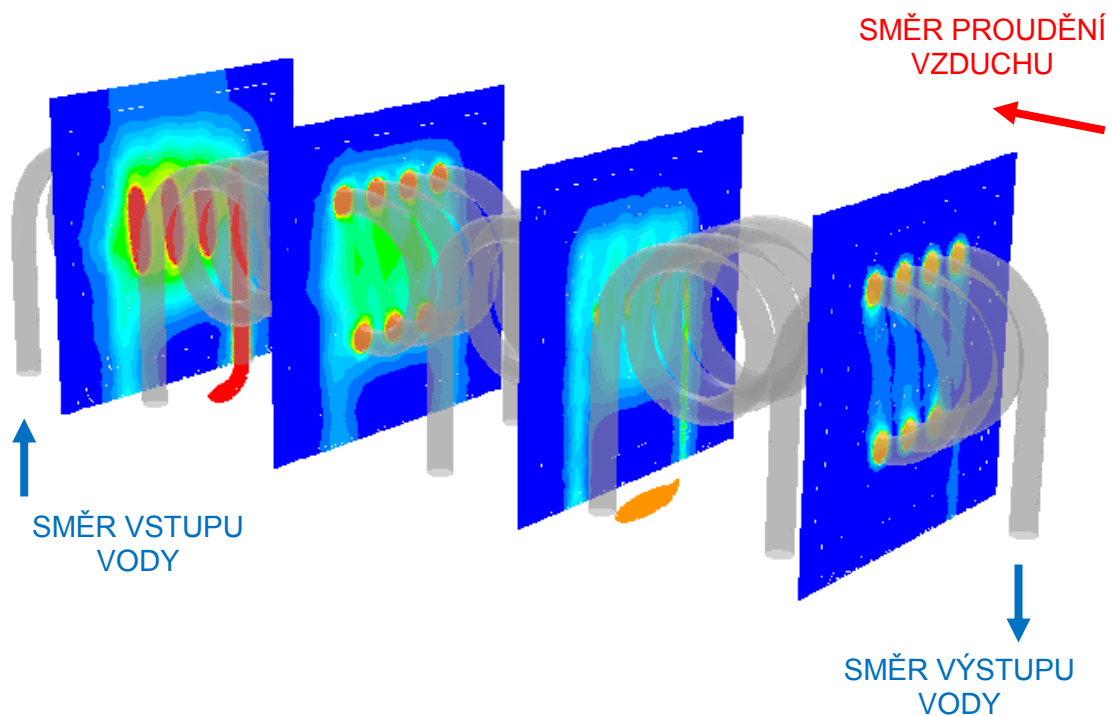
Výsledky numerické simulace proudění vody a vzduchu ve spirálovém výměníku tepla jsou vyhodnoceny pomocí vyplněných kontur teploty v různých řezech. Následně je vyhodnocena teplota stěny spirálové trubky. Výsledky jsou vzájemně porovnávány mezi variantou protiproudého a souprúdého výměníku tepla.



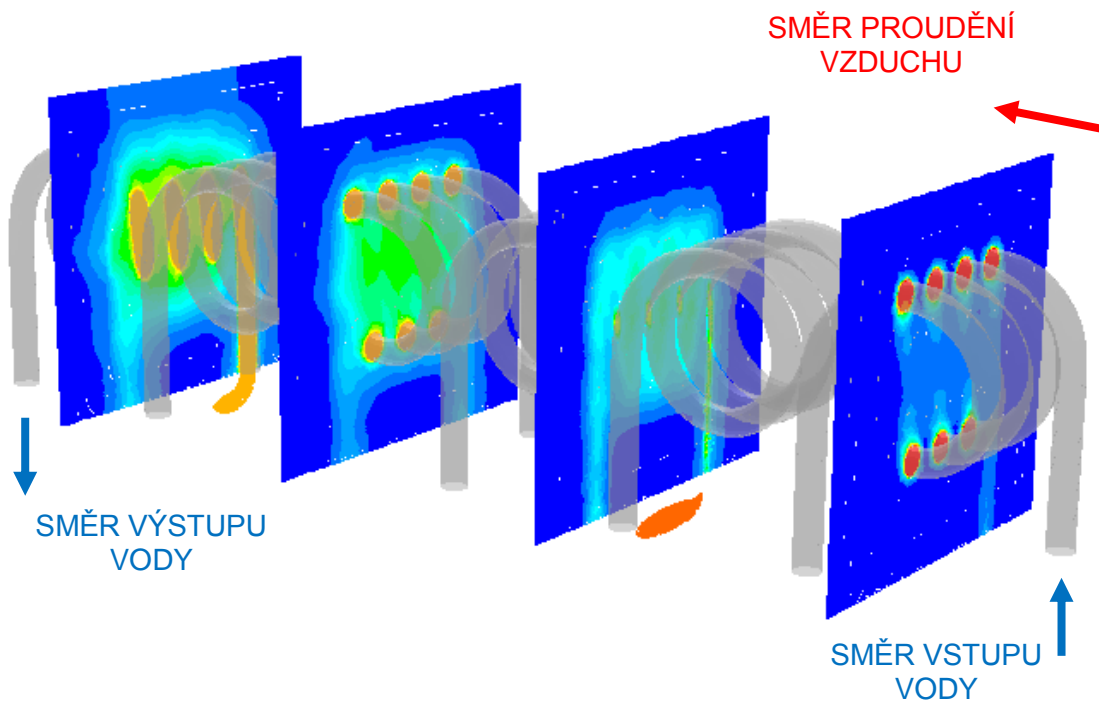
obr. 13.43 Teplotní pole v podélném řezu středem výměníkem tepla (protiproudý)



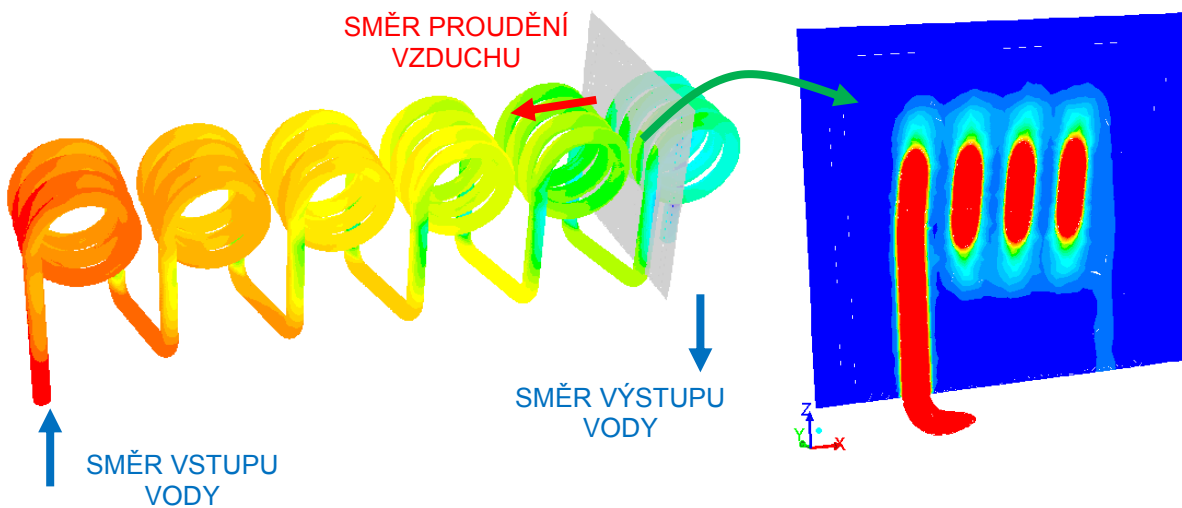
obr. 13.44 Teplotní pole v podélném řezu výměníkem tepla (soproudý)



obr. 13.45 Teplotní pole v příčných řezích výměníkem tepla (protiproudý)

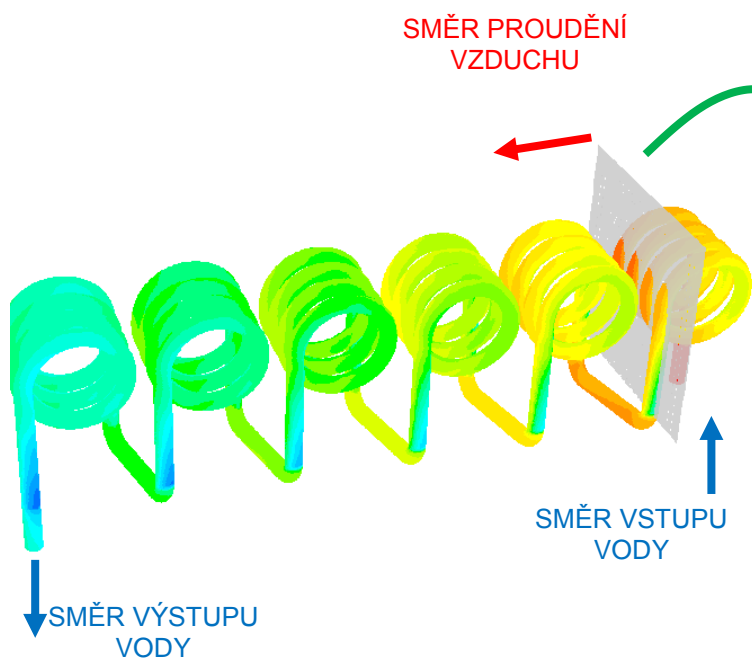


obr. 13.46 Teplotní pole v příčných řezech výměníkem tepla (soproudý)

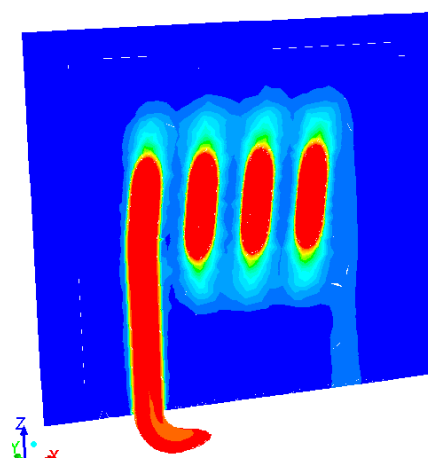


obr. 13.47 Teplota stěny spirálové trubky v případě protiproudého výměníku tepla

obr. 13.48 Teplota v příčném řezu oblasti proudění vody a vzduchu v případě protiproudého výměníku tepla



obr. 13.49 Teplota stěny spirálové trubky v případě souproutého výměníku tepla



obr. 13.50 Teplota v příčném řezu oblasti proudění vody a vzduchu v případě souproutého výměníku tepla

Literatura

- [1] FLUENT: FLUENT 17 - *User's guide*. Fluent Inc. 2016 [online]. Dostupné z <<http://spc.vsb.cz/portal/cz/documentation/manual/index.php>>.
- [2] INCROPERA, F., P. ET AL.. *Fundamentals of heat and mass transfer*. 6th ed.. Hoboken : Wiley, c2007 – xxv. 997 s. ISBN 0-471-45728-0 (váz.)978-0-471-45728-2 (dotisk : váz.)
- [3] KREITH, F., RATONA, B. *Mechanical Engineering Handbook - Heat and Mass Transfer*. CRC Press LLC, 1999. CD-ROM: 2624 pages (Heat Transfer: 288 pages). ISBN-10: 0849397510. ISBN-13: 978-0849397516
- [4] SHAUGHNESSY, E.,J., . KATZ. I., M., SCHAFFER, J., P. *Introduction to fluid mechanics.* New York: Oxford University Press, 2005 - xiv, 1018, [24] s. : il. + 1 CD-ROM ISBN 0-19-515451-7
- [5] KOZUBKOVÁ, M. *Matematické modely kavitace a hydraulického rázu*. Monografie. 130. 1.vydání, Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 2009, 130 stran. ISBN 978-80-248-2043-9.
- [6] STULL, R.B.: *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*, Kluwer Academic Publishers, 1994, s. 251-289.
- [7] BIRD, R. B., STEWART, W. E., LIGHTFOOT, N. N. *Přenosové jevy*. Praha: Academia, 1968, 800 s.
- [8] BIRD, R. B., STEWART, W. E., LIGHTFOOT, N. N. *Transport Phenomena*. John Wiley & Sons, Inc.. New York. 914 p., ISBN 0-471-41077-2
- [9] ROSHKO, A. *On the Development of Turbulent Wakes from Vortex Streets - Technical Report* [online]. Washington, D. C.: National Advisory Committee for Aeronautics, 1954. 27 s. Dostupné z <URL: <http://authors.library.caltech.edu/428/01/ROSnacarp1191.pdf>> [cit. 2006-01-06].
- [10] DRÁBKOVÁ, S., KOZUBKOVÁ, M.: *Numerical modelling of the unsteady vortex structures due to the round Jet-cross flow interaction*. In Sborník XIV. mezinárodní vědecká konference „Aplikácia experimentálnych a numerických metód v mechanike tekutín“. Rajecké Teplice: Žilinská univerzita Žilina, 2004, pp. 85-90, ISBN 80-8070-234-9, 29.4.-30.4.2004
- [11] DRÁBKOVÁ, S. a kol. *Mechanika tekutin*. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 2007. 248 s. (Elearningová učebnice). ISBN 978-80-248-1508-4.
- [12] Kolat Přenos
- [13] KOZUBKOVÁ, M.: *Modelování proudění tekutin FLUENT, CFX*. Ostrava: VŠB-TU, 2008, 154 s., ISBN 978-80-248-1913-6, (Elektronická publikace na CD ROM)
- [14] BOJKO, M.: *Návody do cvičení "Modelování Proudění" - FLUENT*, VŠB-Technická Univerzita Ostrava, 2008, 141 s., ISBN 978-80-248-1909-9.
- [15] BOJKO, M.: *3D Proudění – ANSYS Fluent*, e-learningová skripta, VŠB-Technická Univerzita Ostrava, 2010, 226s.
- [16] BLEJCHAŘ, T: *Návody do cvičení „Modelování proudění“ – CFX*, VŠB-Technická Univerzita Ostrava, 2008, 133 s., ISBN 978-80-248-2050-7.
- [17] BLEJCHAŘ, T: *Turbulence Modelování proudění – CFX*, e-learningová skripta VŠB-Technická Univerzita Ostrava, 2010, 259 s.Bojko
- [18] FABIÁN, P. *Metody matematického a fyzikálního experimentu v proudění tekutin*. Disertační práce. VŠB-TU Ostrava. Ostrava 2007. 104 s.
- [19] http://www.tenez.cz/app/clanek/161/vymeniky_tepla_vsech_druhu_a_typu
- [20] <http://www.olaer.cz/cz-produkty-prehled/cz-produkty-chladice-3/cz-prod-kuehl-rohrbund.htm>
- [21] <http://www.spiraxsarco.com/resources/steam-engineering-tutorials/steam-engineering-principles-and-heat-transfer/steam-consumption-of-heat-exchangers.asp>
- [22] http://en.wikipedia.org/wiki/Shell_and_tube_heat_exchanger
- [23] <http://www.hydro.com/en/Subsites/Hydro-Aluminium-Precision-Tubing/HVACR/Why-Aluminium-in-HVACR/Brazed-heat-exchanger/>
- [24] KOLAT, P. *Přenos tepla a hmoty*. VŠB-Technická Univerzita Ostrava, 2008, 133 s., ISBN 80-7078-0003-9.
- [25] <http://www.ansys.com> *ADJOINT-SOLVER-WORKSHOPS-WS03 . TechSoft Engineering, spol. s r.o. – PRAHA*
- [26] FLUENT: FLUENT 17 - *User's guide*. Fluent Inc. 2016 [online]. Dostupné z

Literatura

< <http://spc.vsb.cz/portal/cz/documentation/manual/index.php> >.