VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Hydromechanika

„Hydrostatika“

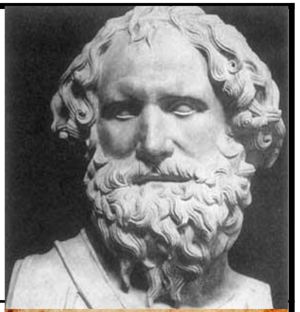
Ing. Kamil Fojtášek, Ph.D.

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

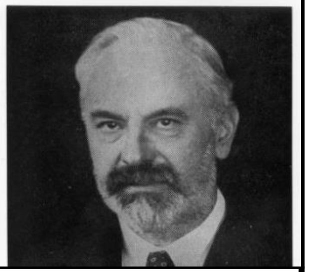
Doporučená literatura

- DRÁBKOVÁ, S. a kolektiv: Mechanika tekutin, dostupné na http://www.338.vsb.cz/wp-content/uploads/2016/03/Drabkova-Mechanikatekutin.pdf
- JANALÍK, J., ŠŤÁVA, P.: Mechanika tekutin. Skriptum. VŠB-TU Ostrava 2002, dostupné na http://www.338.vsb.cz/wp-content/uploads/2016/03/JanalikStava-MechanikaTekutin.pdf
- DRÁBKOVÁ, S., KOZUBKOVÁ, M.: Cvičení z Mechaniky tekutin. Sbírka příkladů. VŠB- TU Ostrava 2004, dostupné na http://www.338.vsb.cz/wp-content/uploads/2016/03/Hydro_2012.pdf
- BIRD, B.R, STEWART, W.E, LIGHTFOOT, E.N.: Přenosové jevy. Academia 1968
- ŠOB, F.: Hydromechanika. Skriptum. VUT Brno 2002
- JEŽEK, J.,VÁRADIOVÁ, B.: Mechanika tekutin pro pětileté obory. ČVUT Praha,1983, 1991
- JEŽEK, J.: Hydromechanika v příkladech. ČVUT Praha, 1975, 1988
- MAŠTOVSKÝ, O.: Hydromechanika. SNTL Praha 1956, 1963
- NOSKIEVIČ, J. A KOL.: Mechanika tekutin. SNTL/ALFA Praha 1990

Z historie Mechaniky tekutin (hydromechaniky)

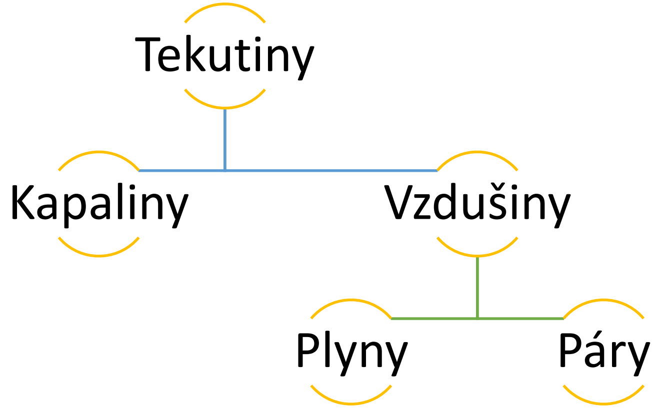
Archimédes (287-212, př.n.l.) - *zkoumal měření nepravidelného objemu těles jejich ponořením do vody. Zavedl pojmy těžiště, tíhová síla a statický moment. Je vynálezcem šroubového čerpadla, jež je využíváno, hlavně v čistírnách odpadních vod.*	
Leonardo da Vinci (1452-1519) - *Jeho tvůrčí činnost zasahovala do různých vědních oborů. V oboru proudění je nutno uvést návrh mlýna s vodním kolem, objevení zákona rychlosti a průřezu v.S=konst, návrhy vhodných tvarů pro čluny.*	
Evangelista Torricelli *(1608-1647) - italský matematik, žák G. Galileiho, zkoumal účinky zemské tíže na kapaliny, definoval vztah pro rychlost výtoku z nádoby v hloubce h pod hladinou, zavedl označení atmosférický tlak vzduchu, vynalezl rtuťový barometr.*	
Isaac Newton (1643-1727) - *Zakladatel moderní fyziky, zkoumal velikost odporu těles pohybujících se v kapalině a objevil zákon třecích napětí v pohybující se kapalině.*	

Leonhardo Euler *(1707-1783) - švýcarský matematik, tvůrce moderní hydromechaniky . Objevil pojem ideální (neviskozní) kapaliny a sestavil její základní diferenciální pohybovou rovnici. Mimo to vynalezl vodní turbínu, pro níž odvodil základní vztah.*	
Daniel Bernoulli *(1700-1782) - Položil základy hydrodynamiky. Jeho stěžejní dílo Hydrodynamica vyšlo r. 1738. Zintegroval Eulerovu pohybovou rovnici a experimentálně prokázal její platnost. Vytvořil první kinetickou teorii plynů.*	
J. L. M. Poiseuille *(1797-1869) - Vyvinul metodu měření krevního tlaku. Zkoumal také proudění tekutin trubicemi. Společně s G.H.L. Hagenem (1797-1884) se zabývali laminárním prouděním a v roce 1838 formulovali Hagen- Poiseuilleův zákon.*	
Gabriel Stokes *(1819-1903), jeden z nejvýznamnějších irských vědců. Určil metodu pro měření kinematické viskozity (Stokesův viskozimetr). Ukázal na prostou lineární závislost napětí na deformační rychlosti, čímž zobecnil Newtonův zákon a společně s* ***Louisem Navierem*** *(1785-1836) tak přispěli k odvození obecné pohybové rovnice pro proudění vazké kapaliny.*	

Osborn Reynolds (1842-1912) Reynolds zkoumal změny proudění uvnitř potrubí při přechodu mezi laminárním a turbulentním prouděním. Určil kritérium pro přechod laminárního proudění na turbulentní, které bylo později označeno jako Reynoldsovo číslo. V roce 1886 formuloval teorii mazání. O tři roky později vytvořil důležitý teoretický model pro turbulentní proudění.	
Ludwig Prandtl (1875-1953) Průkopník v oblasti aerodynamiky. Je objevitelem mezní vrstvy, odvodil diferenciální rovnici pro její popis, působil v oboru měření dynamického tlaku proudění tekutiny. Podílel se na vývoji aerodynamických tunelů.	
James Bicheno Francis (1815-1892) - britský technik, žijící od roku 1833 v USA. V roce 1849 vynalezl a zkonstruoval radiální přetlakovou vodní turbínu, která nese jeho jméno. V této oblasti se dále prosadili **Lester Allen Pelton** (1829-1908) a **Victor Kaplan** (1876-1934), profesor na brněnské technice	

Předmět hydromechanika:

Hydromechanika se zabývá se rovnováhou a účinkem sil v tekutině a to jak v klidu, tak za pohybu tekutiny.

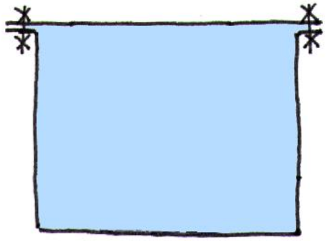


Tekutina

Spojité prostředí *(kontinuum)*
Stejnorodé *(izotropní)* ***prostředí***
Snadný pohyb molekul, velké deformace
Nemá vlastní tvar, zaujímá tvar nádoby

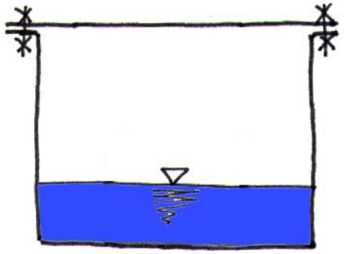
Vzdušnina

Velká změna objemu *v závislosti na tlaku a teplotě.*
Neexistuje hladina*, vyplní celý objem nádoby* (*páry a plyny*)



Kapalina

Malá změna objemu *v závislosti na tlaku a teplotě.*
Tvoří hladinu.

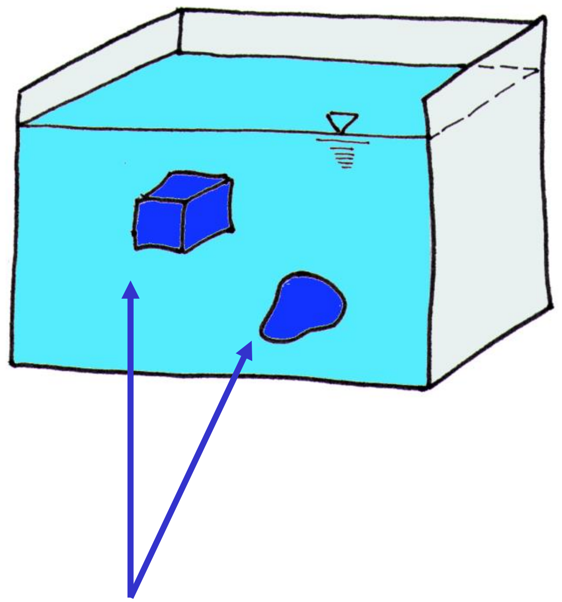


VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Pracovní metody:

Základní vztahy jsou odvozeny z:

- momentové a silové rovnováhy
- zákona zachování hmoty
- zákona zachování energie
- změny hybnosti



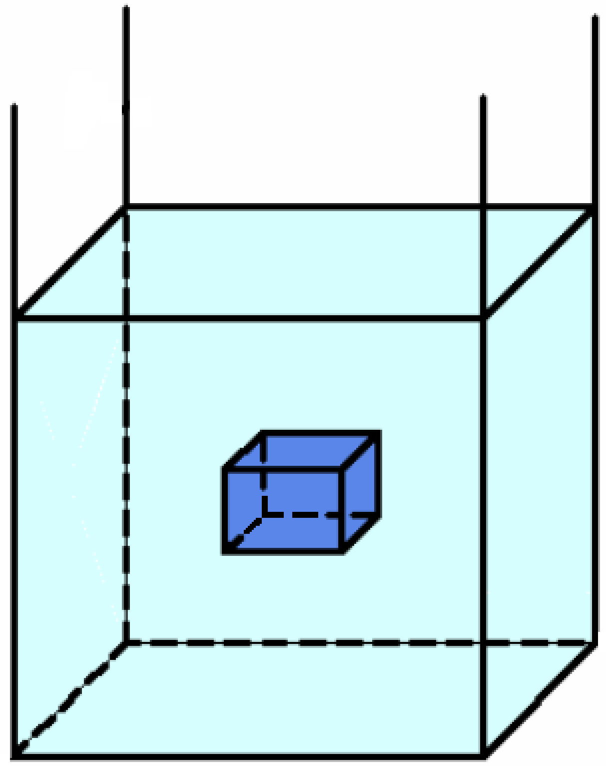
Pro co jsou tyto rovnice sestavovány?

Mechanika tuhého tělesa → **hmotný bod**

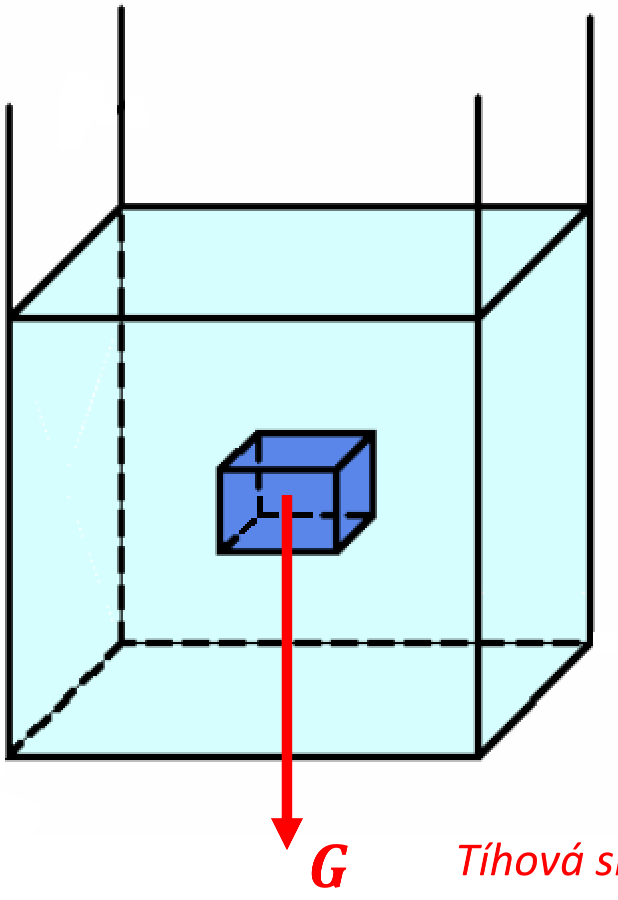
Mechanika tekutin → **elementární objem kapaliny** (makroskopická částice)

Elementární objem kapaliny - *Elementárním objemem kapaliny (makroskopickou částicí) rozumíme velmi malý objem vzhledem k proudu kapaliny, ale dostatečně velký vzhledem k délce volné dráhy molekuly. Proto pro počet molekul obsažených v tomto objemu platí statistické střední hodnoty kinetické energie kapalin.*

Síly působící na kapalinu



Síly působící na kapalinu

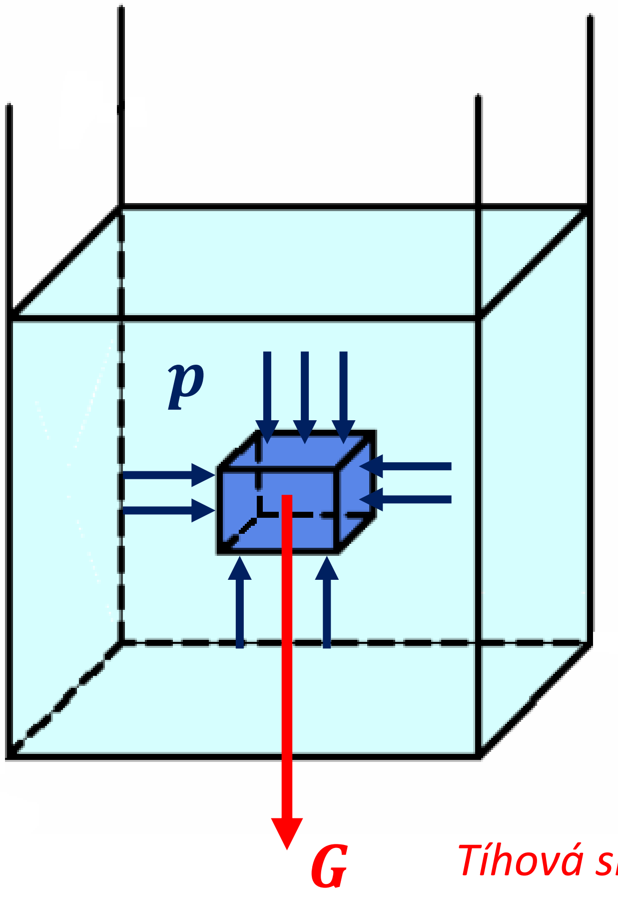


Tíhová síla G od hmotnosti tělesa, působí v těžišti objemu tělesa

$$G = m \cdot g$$

Síly působící na kapalinu

Tlak kapaliny p *působí na všechny plochy (stěny) tělesa*



Tíhová síla G od hmotnosti tělesa, působí v těžišti objemu tělesa

$$G = m \cdot g$$

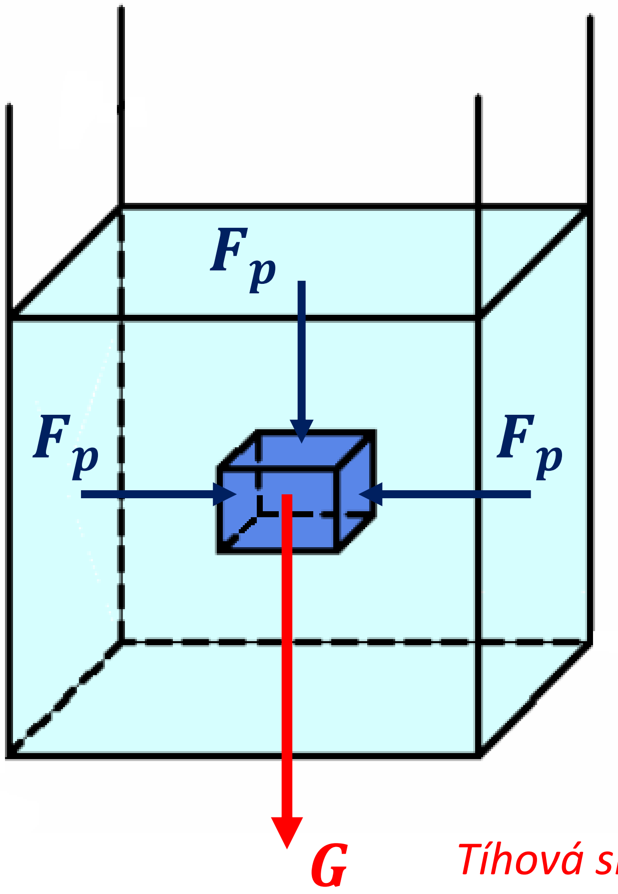
VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Síly působící na kapalinu

Tlak kapaliny p *působí na všechny plochy (stěny) tělesa*

Tlaková síla F_p *vniká od tlaku kapaliny, působí v těžišti plochy*

$$F_p = p \cdot S$$



Tíhová síla G *od hmotnosti tělesa, působí v těžišti objemu tělesa*

$$G = m \cdot g$$

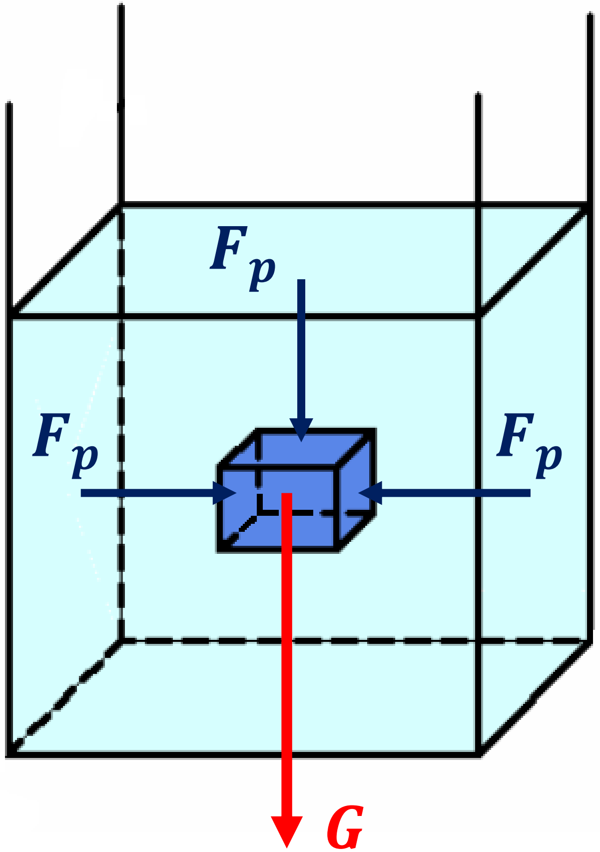
Tyto síly působí i na nás. Kolem nás je vzduch s atmosférickým tlakem, tlak vzduchu působí na každou část našeho těla. Gravitační síla nás drží nohama na zemi, někdy až příliš..

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Síly působící na elementární objem kapaliny

Plošné (tlakové)

Hmotnostní (objemové)



Tlaková síla F_p *vniká od tlaku kapaliny, působí v těžišti **plochy***

$F_p = p \cdot S$

*Tíhová síla G od **hmotnosti** tělesa, působí v těžišti **objemu** tělesa*

$G = m \cdot g$

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Síly působící na elementární objem kapaliny

Plošné (tlakové)

tlaková síla, třecí síla, síla od povrchového napětí

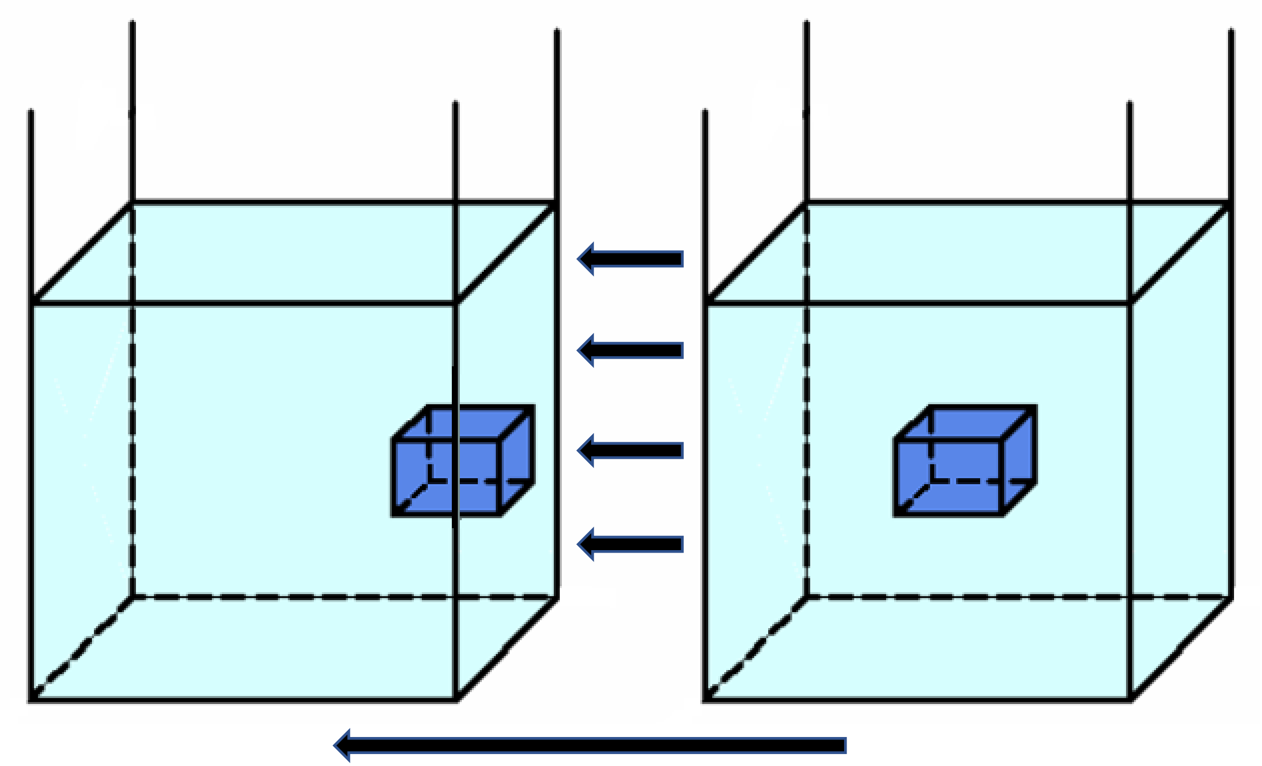
Hmotnostní (objemové)

Vnější hmotnostní síly

tíhová síla

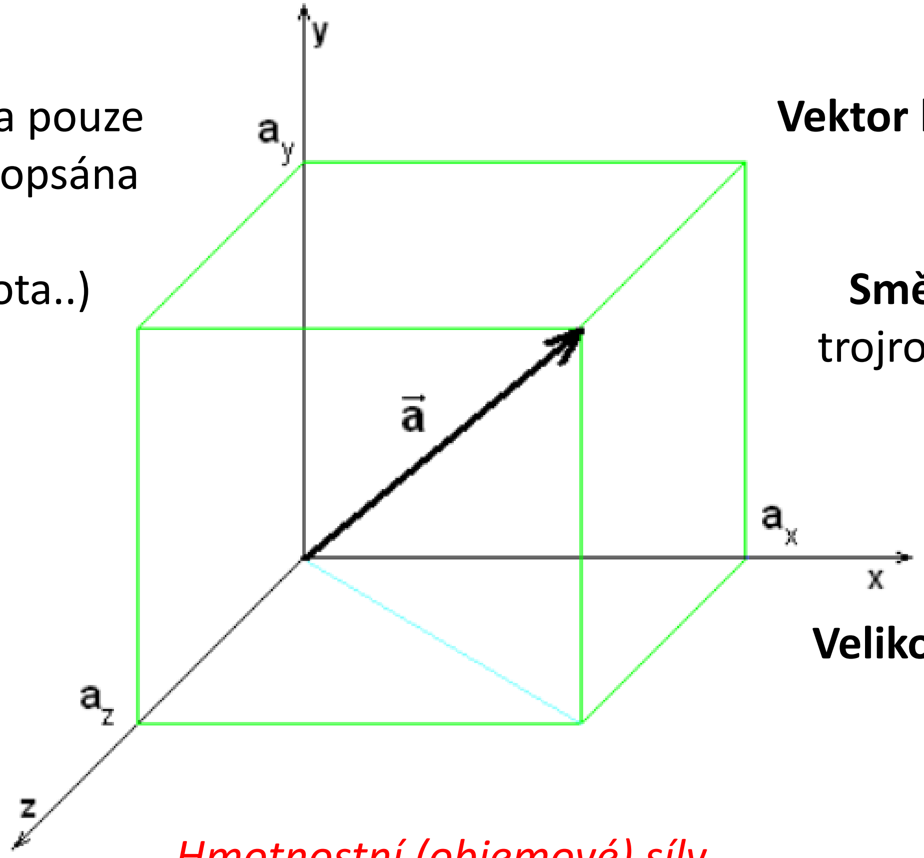
Síly od pohybu kapaliny

setrvačná síla, odstředivá síla



Skalár vs. vektor

Skalár je veličina, která je určena pouze svojí velikostí – její hodnota je popsána **jedním číslem**.
(např. hmotnost, objem, teplota..)



Vektor lze chápat jako orientovanou úsečku, která je definována svojí **velikostí** a **směrem**.

Směr vektoru je dán jednotlivými složkami, v trojrozměrném prostoru je definován pomocí tří složek

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = \boldsymbol{a}$$

Velikost vektoru lze určit za pomocí Pythagorovy věty

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Velikost vektoru je skalár.

Plošné (tlakové) síly

$$d\overrightarrow{F_p} = \vec{n} \cdot p \cdot dS$$

kde $\vec{n}$ je normálový vektor

Hmotnostní (objemové) síly

$$d\overrightarrow{F_o} = \vec{a} \cdot \rho \cdot dV$$

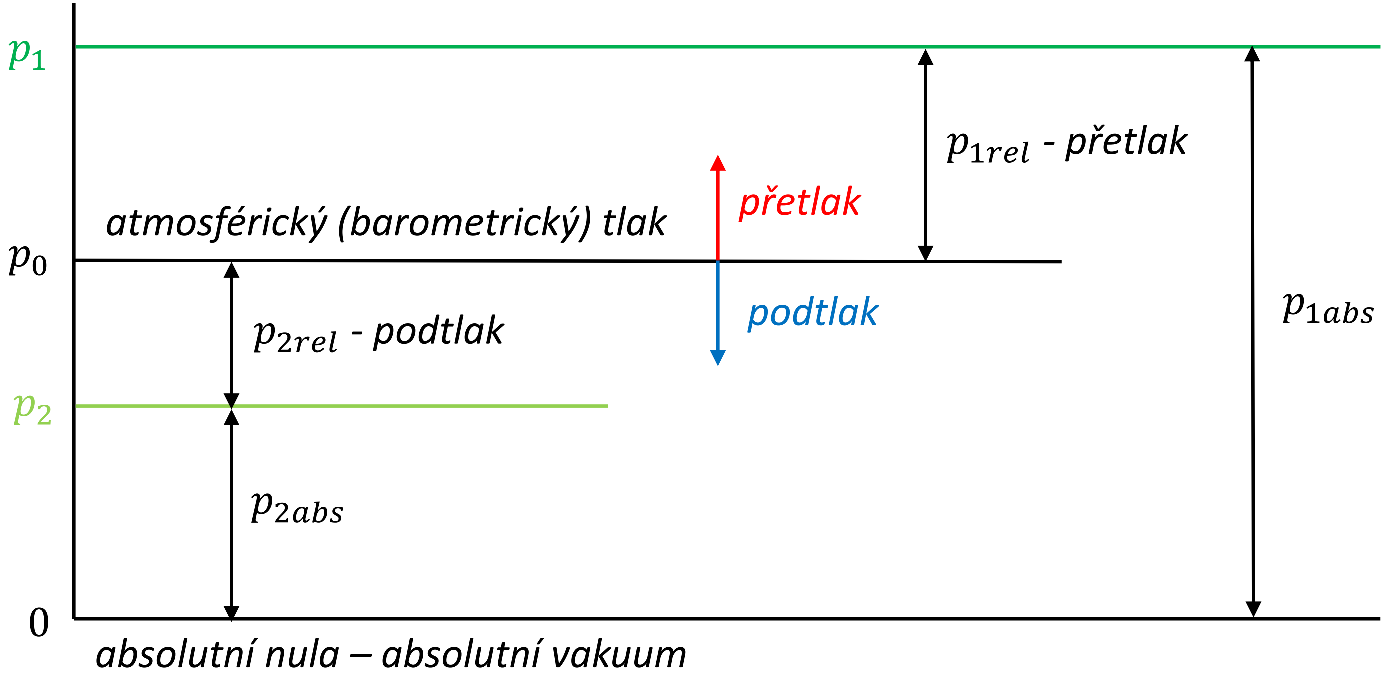
Podmínky rovnováhy sil – diferenciální rovnice

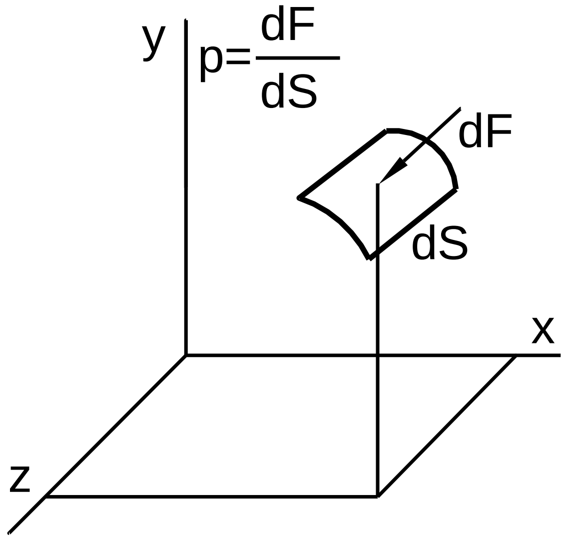
Stavové veličiny

Tlak *p* - *Silový účinek molekul na jednotku plochy, resp. tlak je síla působící na jednotku plochy ve směru normály.*

Jednotka tlaku je Pa – Pacsal ($Pa = N \cdot m^{-2} = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$), odvozená jednotka soustavy SI. V praxi se často používají násobky (předpony) této hodnoty a také jednot bar.

$$1\ bar = 100\ 000\ Pa = 0{,}1\ MPa$$





Ve výpočtech musíme rozlišovat jestli se jedná o absolutní, nebo relativní tlak. Absolutní tlak je vztažen k absolutní nule. Relativní tlak je vztažen k atmosférickému tlaku.

Stavové veličiny

Teplota (T) - *Je to veličina intenzivní (neaditivní), stejně jako tlak a hustota nezávisí na rozměrech tělesa. Jednotka t* [°*C*] *- stupeň Celsiův, T* [*K*] *Kelvin (absolutní teplota)*

$$T[K] = t[°C] + 273{,}15$$

Hustota (měrná hmotnost):

- Hustota plynů je funkcí stavových veličin tj. tlaku p a teploty T

stavová rovnice pro hmotnost *m* ideálního plynu

$$pV = m \cdot r \cdot T, \quad \frac{p}{\rho} = r \cdot T$$

kde r (J.kg^{-1}.K^{-1}) je měrná plynová konstanta

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Hustota kapalin se mění s tlakem a teplotou jen nepatrně a budeme ji považovat za konstantní:

$$\mathrm{dm} = \rho(x, y, z).\mathrm{dV} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho(x, y, z) = \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dV}}}$$

Homogenní látky - *ρ je nezávislé na poloze makroskopické částice*

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V}} \qquad (\mathrm{kg/m^3})$$

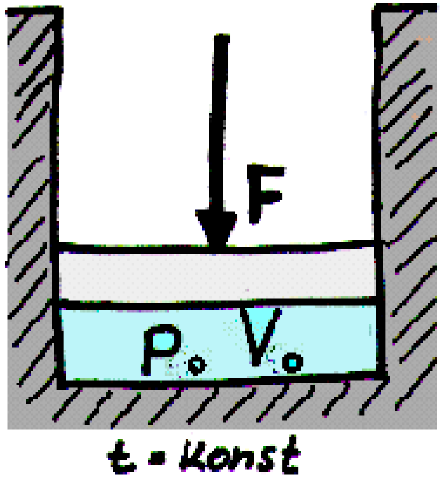
Hustota některých kapalin a zkapalněných plynů při teplotě 4°C

Kapalina	$\rho\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	**Kapalina**	$\rho\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
Benzín	$700 \div 760$	Mléko	1030
Čpavek	890	Ocet	1080
Glycerín	1260	Olivový olej	920
Chlór	1560	Rtuť	13560
Kyselina sírová	1830	Petrolej	$780 \div 850$
Metylalkohol	800	Voda	1000
Nafta (motorová)	$760 \div 800$	Mořská voda	1030

Stlačitelnost:

schopnost zmenšovat objem při zvýšení vnějšího tlaku, $\mathrm{V}=\mathrm{V}(\mathrm{p})$

Součinitel stlačitelnosti $\delta=-\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{d\,p}\right)_{T=konst}=\frac{\Delta V}{V.\Delta p}\quad\left[\mathrm{Pa}^{-1}\right]$



na počátku: p, V , po stlačení p_0, V_0

$$\delta=-\frac{1}{V}\frac{(V-V_0)}{(p-p_0)}=\frac{1}{V}\frac{(V-V_0)}{(p_0-p)}=\frac{\Delta V}{V\Delta p}$$

změna objemu: $\Delta V=\delta V\Delta p$

objem po stlačení: $V_0=V-\Delta V=V-V\delta\Delta p=V(1-\delta\Delta p)$

hustota po stlačení: $\rho_0=\frac{m}{V_0}=\frac{m}{V(1-\delta\Delta p)}=\frac{\rho}{(1-\delta\Delta p)}$

Příklad:

Jak se změní hustota vody, jestliže jí stlačíme tlakem 32 MPa? Součinitel objemové stlačitelnosti vody je $\delta = 4{,}854 \cdot 10^{-10}\ Pa^{-1}$.

Neznáme objem..

Hmotnost kapaliny před stlačením m musí zůstat stejná jako po stlačení m_0.

$$m = m_0$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V$$

$$\rho \cdot V = \rho_0 \cdot V_0$$

$$V_0 = V - \Delta V$$

$$\rho_0 = \frac{\rho \cdot V}{V_0}$$

$$\delta = \frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta p} \Rightarrow \Delta V = V \cdot \delta \cdot \Delta p$$

$$\rho_0 = \frac{\rho \cdot \cancel{V}}{\cancel{V}(1 - \delta \cdot \Delta p)}$$

$$V_0 = V - V \cdot \delta \cdot \Delta p = V(1 - \delta \cdot \Delta p)$$

$$\rho_0 = \frac{1000}{1 - 4{,}854 \cdot 10^{-10} \cdot 32 \cdot 10\hat{}6} = 1015{,}76\ kg \cdot m^{-3}$$

Modul objemové stlačitelnosti K

- převrácená hodnota součinitele stlačitelnosti (objemové pružnosti).

$$K = \frac{V\,\Delta p}{\Delta V} = \frac{1}{\delta} \quad \text{[Pa]}$$

Má podobný význam, jako modul pružnosti E, pro vodu je jeho hodnota K=2.36 10^9 [Pa]. Mění se v závislosti na teplotě a tlaku.

Rychlost zvuku a_t - rychlost kterou se šíří tlakové vlny v mediu.

$$m = \rho V = konst. \Rightarrow dm = d\rho.V + \rho.dV = 0 \Rightarrow -\frac{V}{dV} = \frac{\rho}{d\rho}$$

Po dosazení do výchozího definičního vztahu

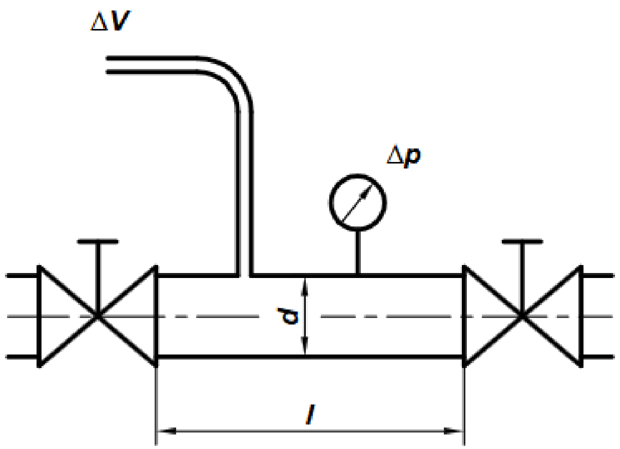
$$K = -V\frac{dp}{dV} = \rho\frac{dp}{d\rho} \Rightarrow a_t = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad \left[ms^{-1}\right]$$

Příklad 2.1.3

Potrubí průměru d a délky l je naplněno vodou při atmosférickém tlaku. Jak velký objem ΔV je nutno vtlačit do potrubí při tlakové zkoušce, aby se tlak zvýšil o Δp? Potrubí považujte za tuhé, měrná hmotnost vody je ρ, modul pružnosti kapaliny je K. Určete součinitel stlačitelnosti δ a teoretickou rychlost zvuku a_t.

Zadáno:

l =	70 m	
d =	450 mm	
Δp =	0.5 MPa	
K =	2E+09 Pa	
ρ =	1000 $kg.m^{-3}$	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
ΔV = ?	m^3	0.00278
δ = ?	MPa^{-1}	0.00050
a_t = ?	$m.s^{-1}$	1414.21



$$\delta = \frac{1}{K}$$

$$a_t = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

Objem válce:

$$V = S \cdot l = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot l$$

Vtlačený objem

$$\delta = \frac{\Delta V}{V \cdot \Delta p} \rightarrow \Delta V = \delta \cdot V \cdot \Delta p$$

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

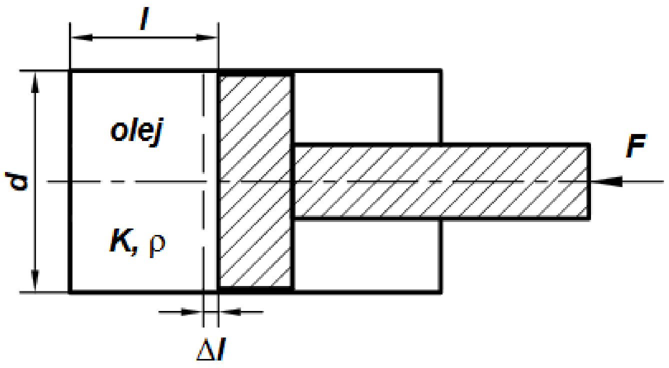
Příklad 2.1.5

Stanovte posunutí pístu Δl hydraulického válce vlivem stlačitelnosti kapaliny při zatížení pístnice silou F. Určete teoretickou rychlost zvuku v oleji a_t, vypočtěte součinitel stlačitelnosti kapaliny δ.

Zadáno:

l = 1000 mm
d = 80 mm
F = 28000 N
ρ = 900 kg.m^{-3}
K = 1300 MPa

Vypočtěte:		Výsledky:
Δp = ?	MPa	5.57043
Δl = ?	m	0.00428
a_t = ?	ms^{-1}	1 201.85
δ = ?	MPa^{-1}	0.00077



Teoretická rychlost zvuku a součinitel objemové stlačitelnosti kapaliny stejně, jako v předchozím příkladu:

$$\delta = \frac{1}{K} \qquad a_t = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

Tlak ve válci Δp za využití obecného vztahu z Pascalova zákona:

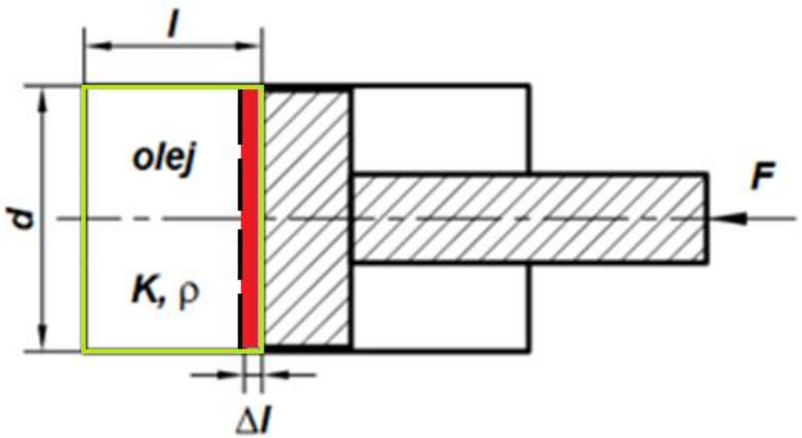
$$\Delta p = \frac{F}{S}$$

Posunutí pístu Δl vlivem stlačitelnosti kapaliny.
Původní objem válce:

$$V = S \cdot l = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot l$$

Objem po stlačení:

$$\Delta V = S \cdot \Delta l = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \Delta l$$



$$\delta = \frac{\Delta V}{V \cdot \Delta p} \rightarrow \Delta V = \delta \cdot V \cdot \Delta p$$

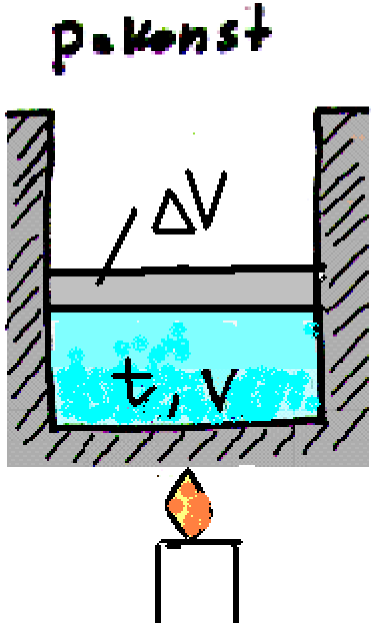
$$\cancel{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} \cdot \Delta l = \delta \cdot \cancel{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} \cdot l \cdot \Delta p$$

$$\Delta l = \delta \cdot l \cdot \Delta p$$

Teplotní roztažnost:

- *schopnost měnit objem se změnou teploty.* $V = V(t)$

(Předpokládáme, že děj probíhá za konstantní ho tlaku)



$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dt}\right)_{p=konst} = \frac{\Delta V}{V.\Delta t} \quad \left[K^{-1}, {}^{O}C^{-1}\right]$$

na počátku: t, V , po zahřátí t_0, V_0

$$\beta = \frac{1}{V}\frac{V_0 - V}{t_0 - t} = \frac{\Delta V}{V.\Delta t}$$

změna objemu: $\Delta V = V\beta\Delta t$

objem po zahřátí: $V_0 = V + \Delta V = V + V\beta\Delta t = V(1 + \beta\Delta t)$

hustota po zahřátí: $\rho_0 = \frac{m}{V_0} = \frac{m}{V(1+\beta\Delta t)} = \frac{\rho}{(1+\beta\Delta t)}$

Příklad:

Jaký musí být minimální objem expanzní nádoby ústředního topení, aby se do něj vlezla přebytečná voda ohřátím systému z teploty $t = 10°C$ na teplotu $t_0 = 70°C$. Původní objem vody je $V = 2{,}5\, m^3$. Součinitel teplotní roztažnosti vody $\beta = 0{,}00018\, K^{-1}$.

$$\Delta V = \beta \cdot V \cdot \Delta t = 0{,}00018 \cdot 2{,}5 \cdot (70 - 10) = 0{,}027 m^3 = 27\, l$$

Jak by se zvýšil tlak v systému z předchozího příkladu, pokud by nebyla použita expanzní nádoba a systém byl před zahřátím uzavřený? Součinitel objemové stlačitelnosti vody $\delta = 4{,}9 \cdot 10^{-10}$. Při výpočtu zanedbáváme deformace stěn systému.

$$\Delta V = \beta \cdot V \cdot \Delta t = \delta \cdot V \cdot \Delta p$$

$$\Delta p = \frac{\beta}{\delta} \cdot \Delta t = \frac{0{,}00018}{4{,}9 \cdot 10^{-10}} \cdot 60$$

$$\Delta p = 22{,}04\, MPa$$

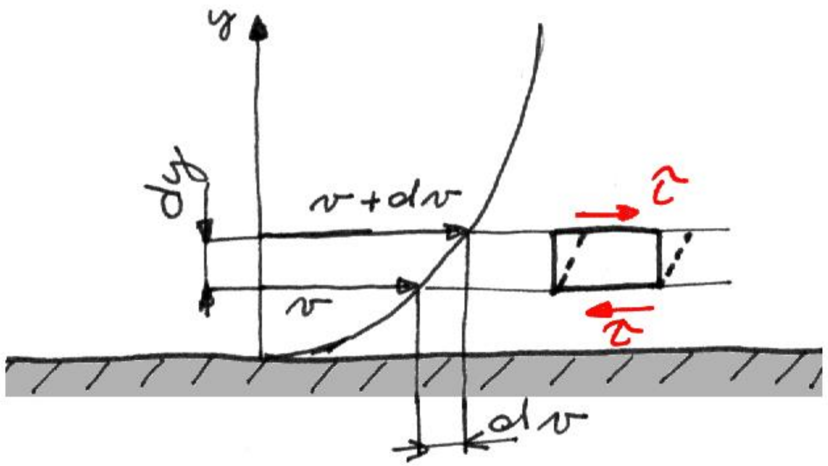
Viskozita

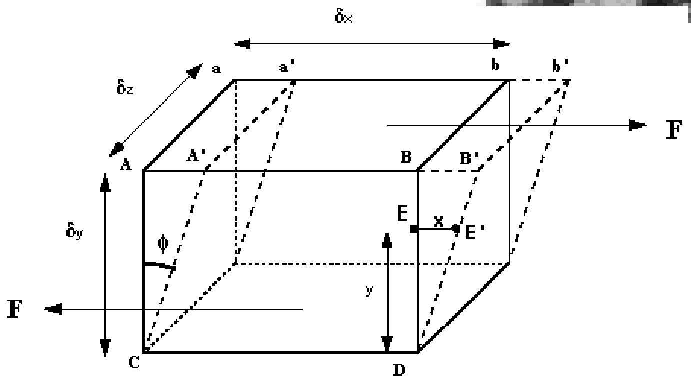
Viskozita - odpor částic kapaliny při pohybu. Pohybují-li se sousední vrstvy kapaliny různými rychlostmi, vzniká na jejich rozhraní smykové napětí, které brání pohybu. Pomalejší vrstva je zrychlována a naopak zase rychlejší zbržďována.

$$\tau = \frac{dF_t}{dS} \qquad \left[\mathrm{Nm}^{-2}\right]$$

První formulaci uvedl v roce 1687 anglický fyzik Isaac Newton pro laminární proudění.

$$\tau = \eta \cdot \frac{dv}{dy}$$





Tečné napětí je úměrné změně rychlosti ve směru kolmém na směr pohybu.

Viskozita

Dynamická Viskozita η

$$\eta = \tau \frac{dy}{dv} \qquad \left[\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}} \right]$$

V technické měrové soustavě Poise, což je $1P = 1gcm^{-1}s^{-1} = 0{,}1$ Pa.s.

Kinematická viskozita ν

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \qquad \left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}} \right]$$

V technické měrové soustavě Stokes, platí $1S = cm^2s^{-1} = 10^{-4}\ m^2s^{-1}$.

Newtonské kapaliny - *Dynamická viskozita je konstantní (př. voda a ostatní běžné kapaliny).*

NeNewtonské kapaliny -*Viskozita není konstantní, je závislá na tečném napětí, nebo na změně rychlosti ve směru kolmém na směr rychlosti. (Př. hydrosměsi, krev, tečení plastů, saponáty, různá maziva, atd.)*

•**U plynů roste vazkost s rostoucí teplotou**. Tepelný pohyb molekul převládá nad silami mezimolekulárními, se zvýšením teploty vzrůstá rychlost tepelného pohybu molekul a tím vzroste i viskozita plynu. Tento poznatek je ve shodě se skutečností

•U kapalin je tomu obráceně. U nich jsou ještě dosti výrazné mezimolekulární síly proti tepelnému pohybu molekul. Zvýšením teploty dochází k intenzivnější výměně hybností částic v pohybujících se vrstvách kapalin a tečné napětí se zmenšuje. **U kapalin klesá vazkost s rostoucí teplotou**.

•Viskozita je obecně funkcí veličin stavu, tj. tlaku a teploty. Mimo závislosti pro vodu a vzduch jsou technicky důležité závislosti dynamické viskozity na teplotě pro minerální oleje.

$$\eta = \eta_0 \cdot e^{(-k \cdot T)}, \qquad \eta = \eta_0' \cdot e^{\frac{A}{t+B}}$$

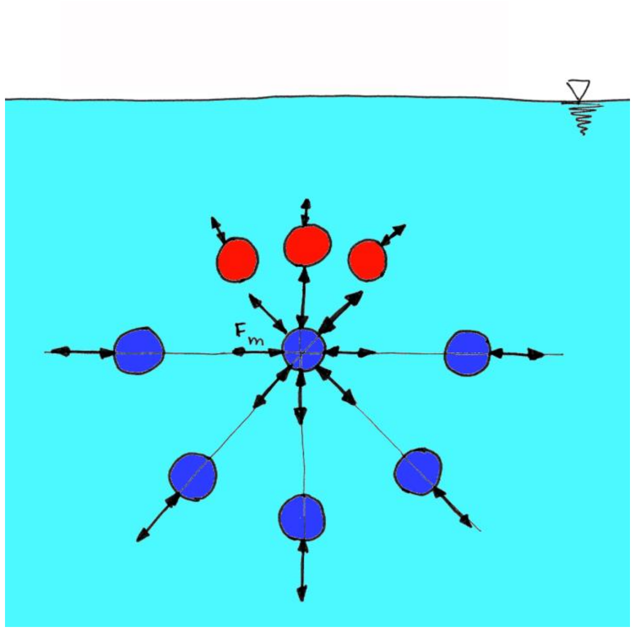
kde η_0, η_0', k, A, B jsou konstanty, které je nutno pro jednotlivé druhy olejů určit experimentálně

Povrchové napětí

Povrchové napětí - *je to energie vrstvy molekul kapaliny E_{pn} na rozhraní s jinou látkou vztažená na jednotku plochy rozhraní.*

$$\sigma = \frac{E_{pn}}{S_{pn}} \quad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2}\right] = \left[\frac{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}\frac{1}{\mathrm{m}^2}\right] = \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$$

Rozhraní kapaliny s jinou látkou se jeví jako potaženo velmi tenkou a napjatou vrstvou. Příčinou povrchového napětí jsou síly působící mezi molekulami kapaliny.



$$\sigma = \frac{F_{pn}}{\ell} \qquad \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$$

kde F_{pn} je výsledný účinek povrchových sil mezi molekulami kapaliny a jiné látky a je délky rozhraní.

Povrchové napětí

Účinky povrchového napětí se projeví :

- *vzlínáním u stěn nádoby,*
- *v kapiláře stoupáním, nebo klesáním sloupce kapaliny vůči hladině,*
- *při rozprašování kapaliny - tvorba kuliček,*
- *zúžení paprsku kapaliny a jeho rozpad,*
- *tvorba bublin v kapalině - kavitace,*
- *při vytváření vln na hladině,*
- *má významný vliv na tvorbu hladinových vírů s přisáváním vzduchu,*
- *umožňuje pohyb vodoměrek po hladině.*

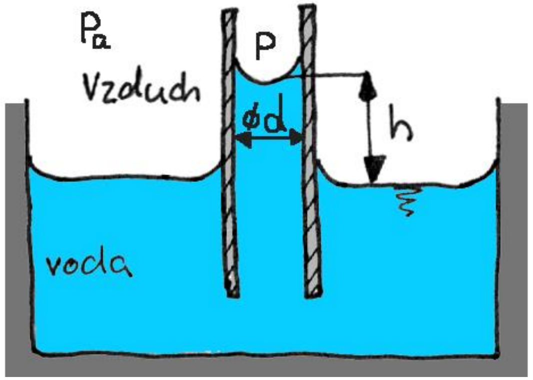
Kapilární jevy

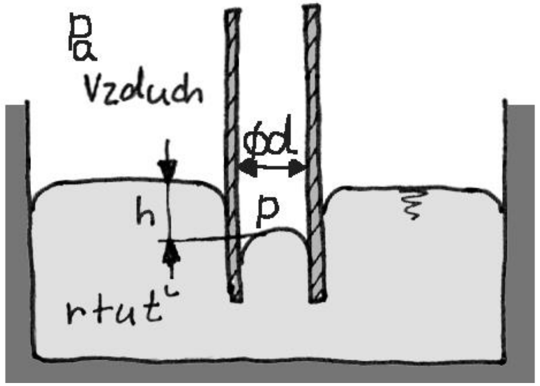
Předpoklad! ***Vnitřní průměr trubičky je velmi malý***

• Kapilární jevy jsou důsledkem povrchového napětí. Vyskytují u trubiček velmi malého průměru – kapilár, nebo v porézním prostředí.

• Když adhezní síly jsou větší než kohezní, vystupuje kapalina v kapiláře do výšky h .

• V opačném případě, kdy kohezní síly jsou větší než adhezní, zůstává kapalina v kapiláře o výšku h níže než je hladina okolní kapaliny.





O jakou výšku *h* *tedy vystoupí, nebo klesne kapalina v kapiláře?*

Vyjdeme z rovnováhy síly povrchové a tíhové:

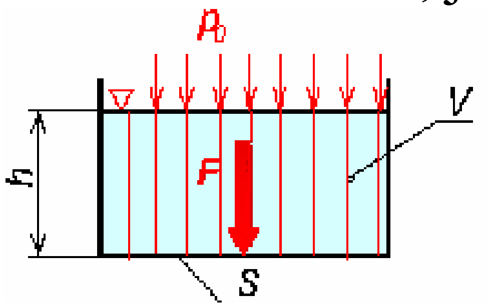
$$\pi d\sigma = \frac{\pi}{4} d^2 h \rho g \qquad \text{odtud} \qquad h = \frac{4\sigma}{\rho g d}$$

Povrchové napětí vody je $\sigma = 0{,}072\ \mathrm{Nm^{-1}}$

Tlak a jeho působení

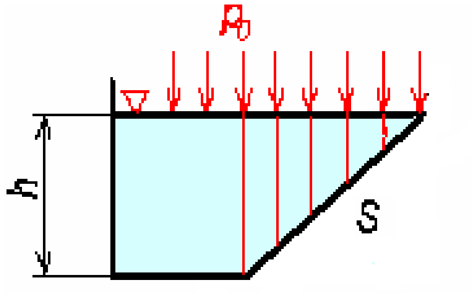
Tlak kapaliny je **dán velikostí tlakové síly, působící kolmo na jednotku plochy**. Je-li tlaková síla rovnoměrně rozložena, je tlak dán poměrem velikosti síly a plochy

$$p = \frac{F}{S}$$



Při nerovnoměrném rozložení síly je dán obecně

$$p = \frac{dF}{dS}$$



Tlak je funkcí polohy: p = p(x,y,z)

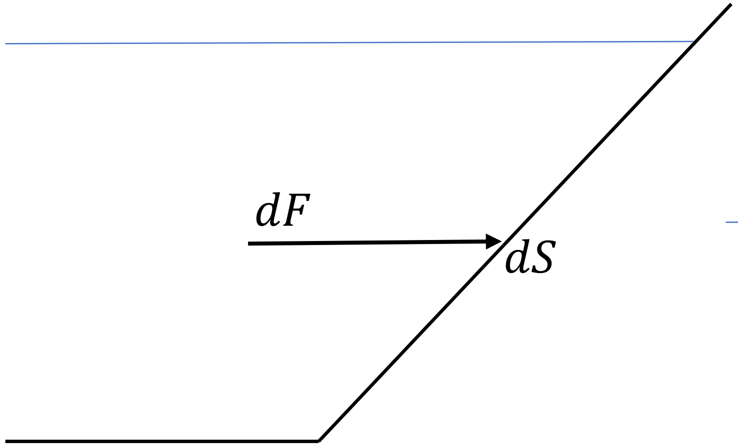
$$\boxed{dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz}$$

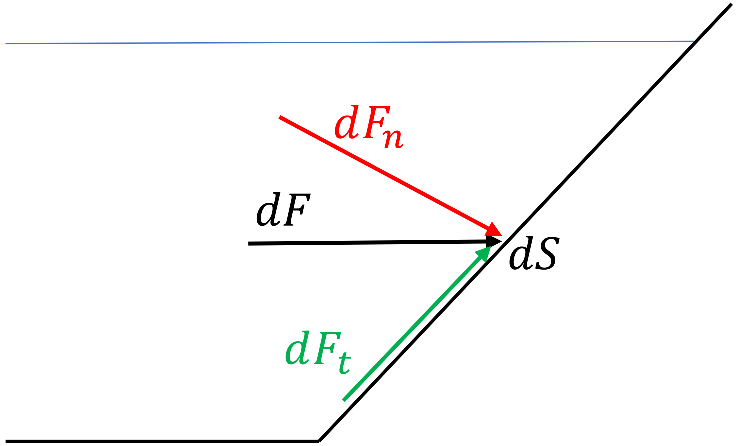
Tlak působí vždy kolmo na plochu a v určitém místě je ve všech směrech stejný, nezávisí tedy na sklonu plochy, na niž působí. Obě tvrzení si nyní dokážeme.

Tlaková síla na elementární plochu

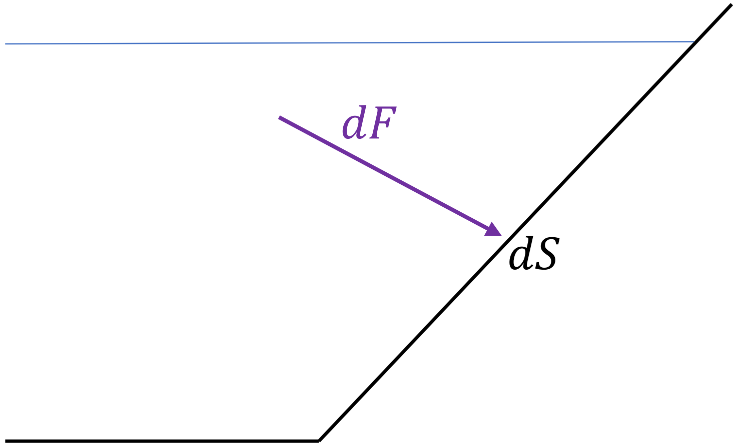
Kdyby síla dF na plochu dS ve směru normály, dala by se rozložit na složku normálovou dF_n a tečnou dF_t.

Tečná složka tlakové síly dF_t by vynutila pohyb částic kapaliny, které nekladou proti vzájemnému posunutí odpor.

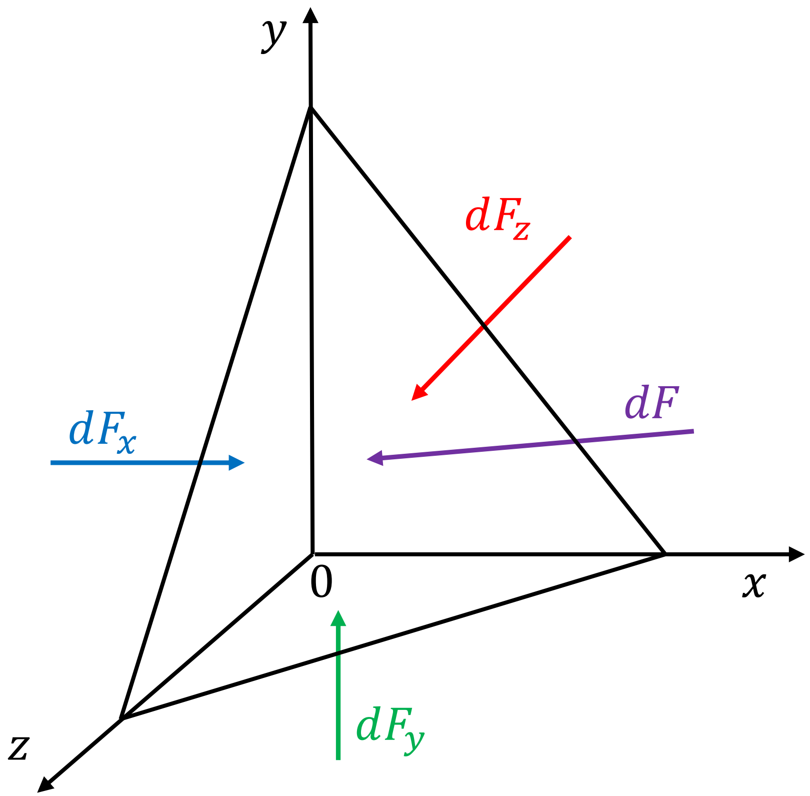




Jelikož je tekutina v klidu, musí tlaková síla dF působit kolmo na plochu.



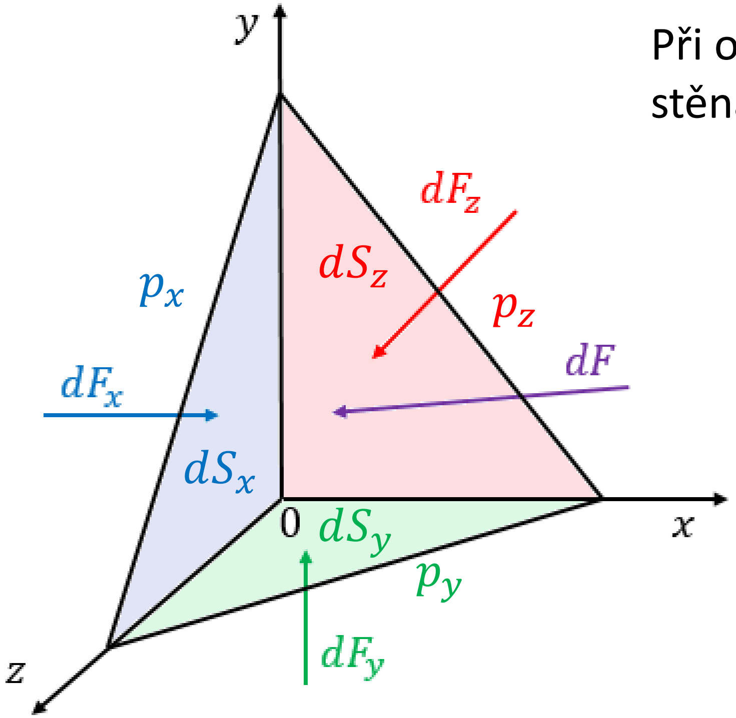
Zákon o šíření tlaku v kapalinách



Předpokládáme určitý objem v rovnováze, částice kapaliny se nepohybují vůči sobě ani stěnám nádoby. Abychom dokázali, **že tlak v libovolném místě kapaliny nezávisí na směru působení**, zvolíme elementární objem kapaliny ve tvaru čtyřstěnu. Jeho tři stěny leží v rovinách os x, y a z. Účinek okolní kapaliny na plochy čtyřstěnu se nahradí tlakovými silami dF_x, dF_y, dF_z a dF.

Tíha kapaliny ve čtyřstěnu $dF_g = \rho \cdot g \cdot dV$ se může **zanedbat**, jelikož je o řád menší veličinou, než tlakové síly.

Zákon o šíření tlaku v kapalinách



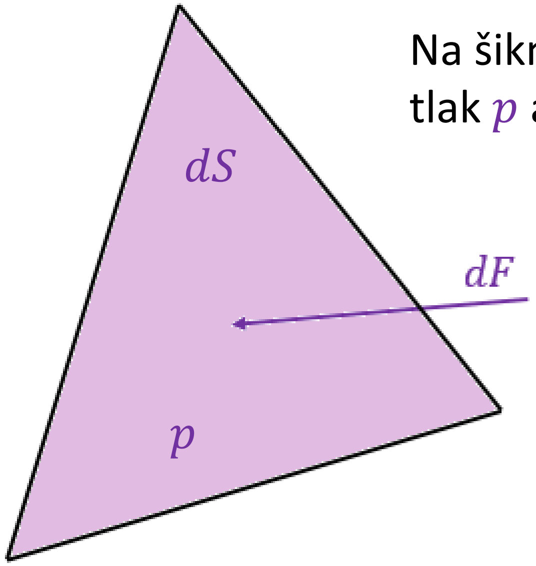
Při odvozování se předpokládá, že tlak na stěnách čtyřstěnu p_x, p_y a p_z je různý.

$$dF_x = p_x \cdot dS_x$$

$$dF_y = p_y \cdot dS_y$$

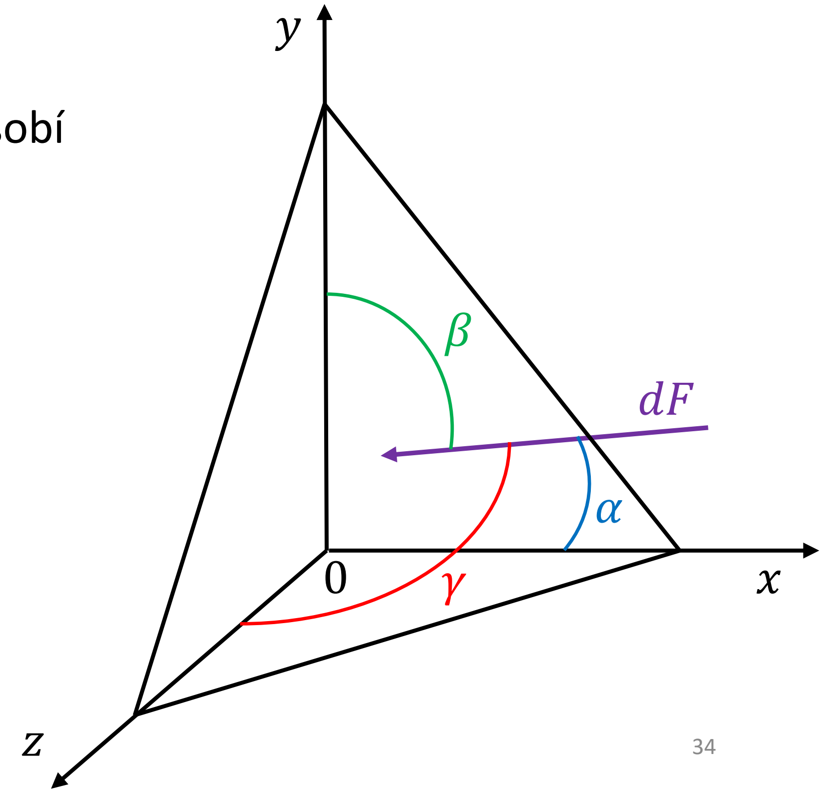
$$dF_z = p_z \cdot dS_z$$

Tento tlak p působí ve směru normály plochy dS, která svírá s osami x, y, z úhly α, β, γ.

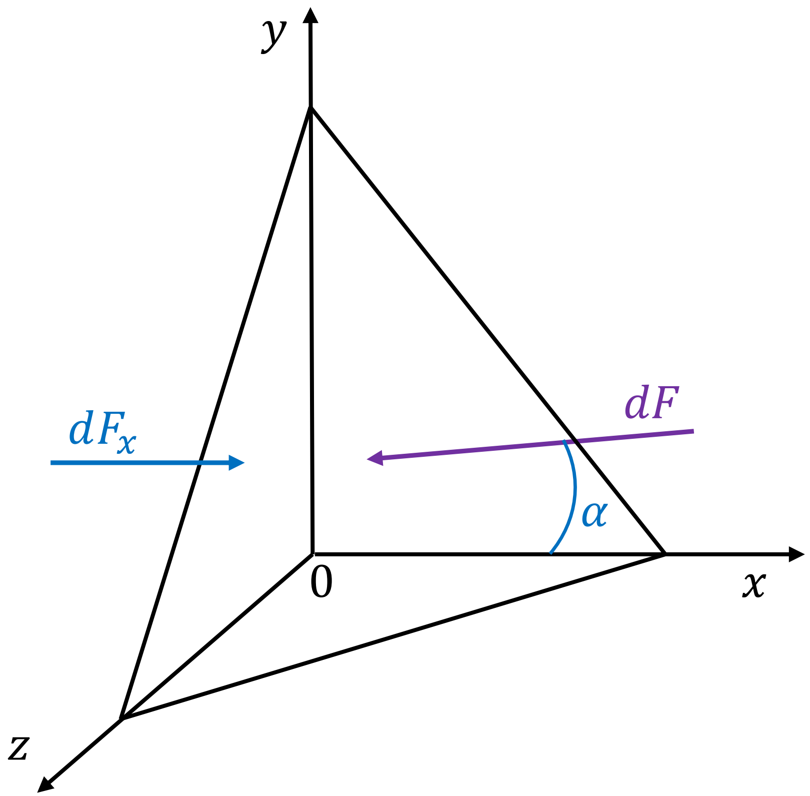


Na šikmou stěnu dS působí tlak p a tlaková síla je

$$dF = p \cdot dS$$



Zákon o šíření tlaku v kapalinách



Vzhledem k tomu, že tekutina je v klidu, musí být splněny všechny podmínky statické rovnováhy sil:

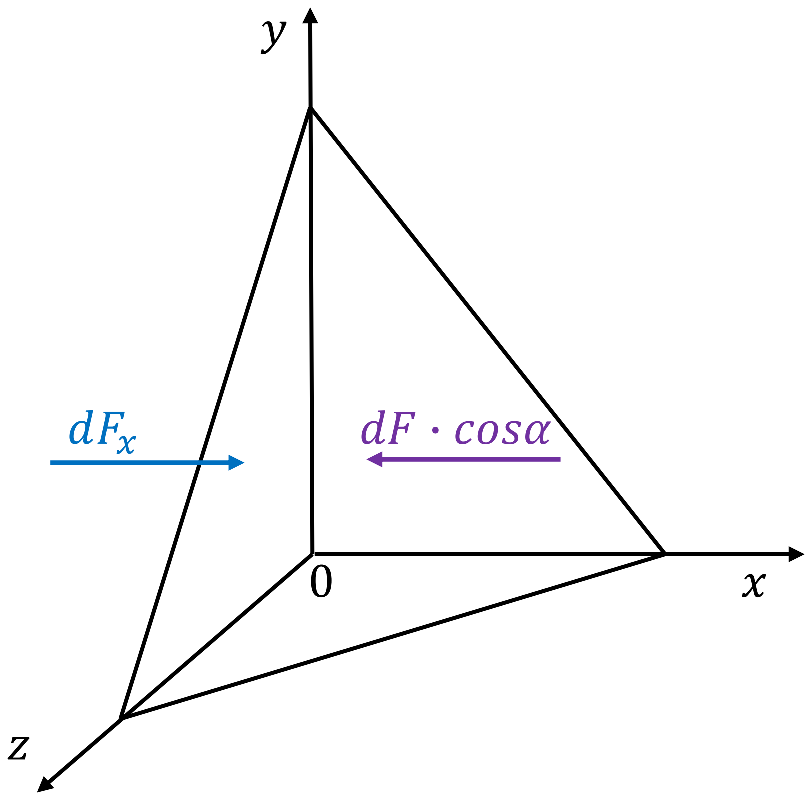
$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0, \sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0$$

Jelikož tlaky na plochy čtyřstěnu jsou konstantní, působí výsledné tlakové síly v těžištích trojúhelníků. Plochy trojúhelníků dS_x, dS_y a dS_z jsou průměty plochy dS, což platí i o jejich těžištích.

Také výsledné tlakové síly se protínají v jednom bodě a momentové podmínky rovnováhy jsou splněny. Stačí tedy uvažovat jen zbývající podmínky rovnováhy sil.

Ve směru osy x působí tlaková síla dF_x a složka tlaku dF do směru osy x, tedy $dF \cdot cos\alpha$. Ostatní síly jsou kolmé na osu x a proto jsou jejich složky nulové.

Zákon o šíření tlaku v kapalinách



Vzhledem k tomu, že tekutina je v klidu, musí být splněny všechny podmínky statické rovnováhy sil:

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0, \sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0$$

Jelikož tlaky na plochy čtyřstěnu jsou konstantní, působí výsledné tlakové síly v těžištích trojúhelníků. Plochy trojúhelníků dS_x, dS_y a dS_z jsou průměty plochy dS, což platí i o jejich těžištích.

Také výsledné tlakové síly se protínají v jednom bodě a momentové podmínky rovnováhy jsou splněny. Stačí tedy uvažovat jen zbývající podmínky rovnováhy sil.

Ve směru osy x působí tlaková síla dF_x a složka tlaku dF do směru osy x, tedy $dF \cdot cos\alpha$. Ostatní síly jsou kolmé na osu x a proto jsou jejich složky nulové.

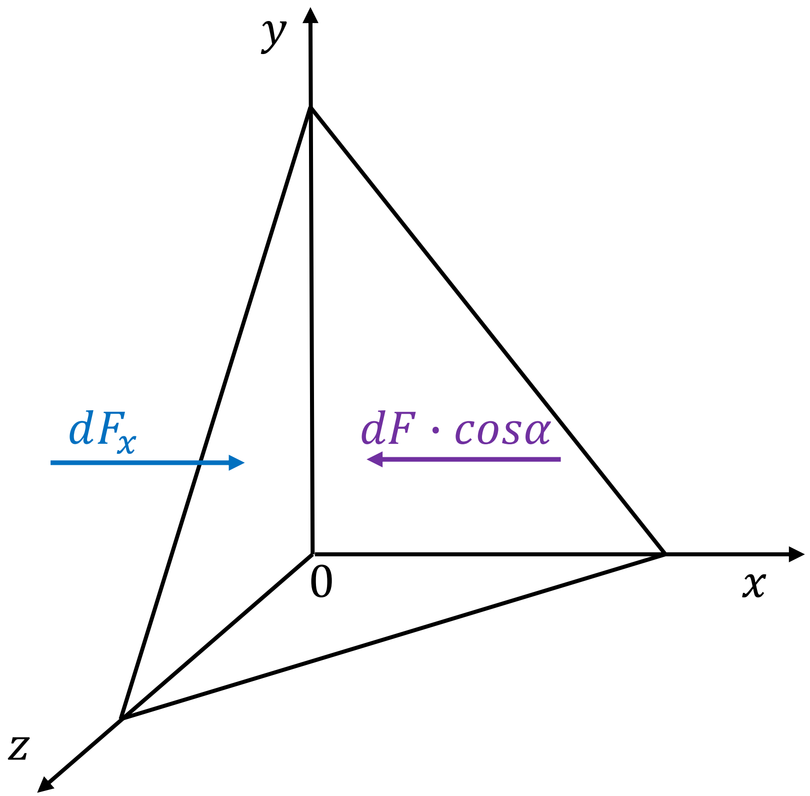
První podmínka statické rovnováhy sil je dána rovnicí

$$dF_x - dF \cdot cos\alpha = 0$$

Po dosazení

$$p_x \cdot dS_x - p \cdot dS \cdot cos\alpha = 0$$

Zákon o šíření tlaku v kapalinách



O plochách dS_x a dS bylo uvedeno, že dS_x je průmětem plochy dS, pro nějž platí

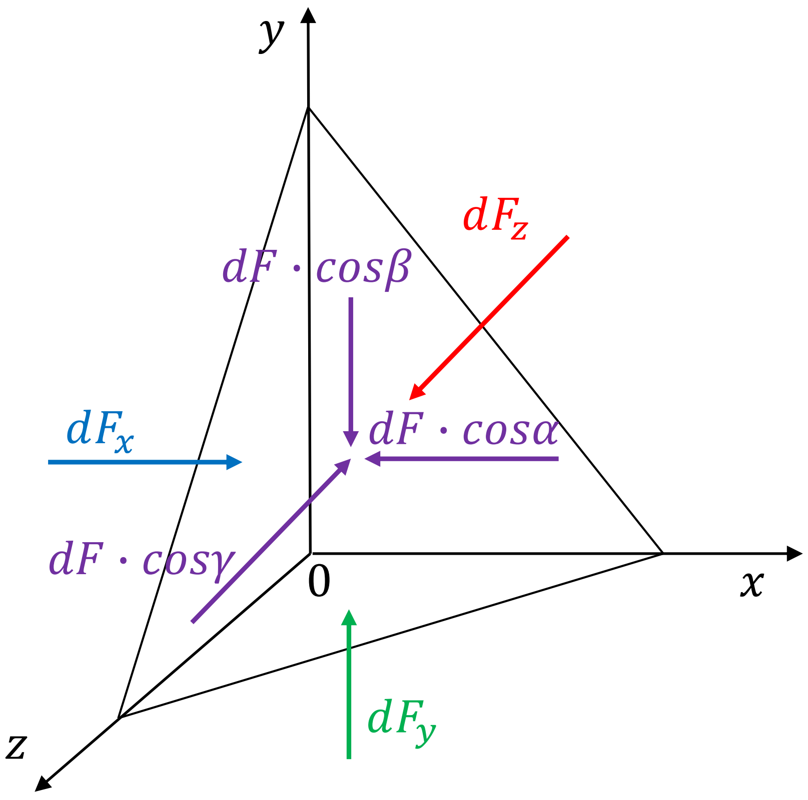
$$dS_x = dS \cdot cos\alpha$$

Podmínka rovnováhy se upraví podle předchozí rovnice, tedy

$$p_x \cdot dS \cdot cos\alpha - p \cdot dS \cdot cos\alpha = 0$$

$$p = p_x$$

Zákon o šíření tlaku v kapalinách



O plochách dS_x a dS bylo uvedeno, že dS_x je průmětem plochy dS, pro nějž platí

$$dS_x = dS \cdot cos\alpha$$

Podmínka rovnováhy se upraví podle předchozí rovnice, tedy

$$p_x \cdot dS \cdot cos\alpha - p \cdot dS \cdot cos\alpha = 0$$

$$p = p_x$$

Obdobně by se postupovalo pro osy y a z

$$dF_y - dF \cdot cos\beta = 0 \qquad dF_z - dF \cdot cos\gamma = 0$$

$$p_y \cdot dS_y - p \cdot dS \cdot cos\beta = 0 \qquad p_z \cdot dS_z - p \cdot dS \cdot cos\gamma = 0$$

$$dS_y = dS \cdot cos\beta \qquad dS_z = dS \cdot cos\gamma$$

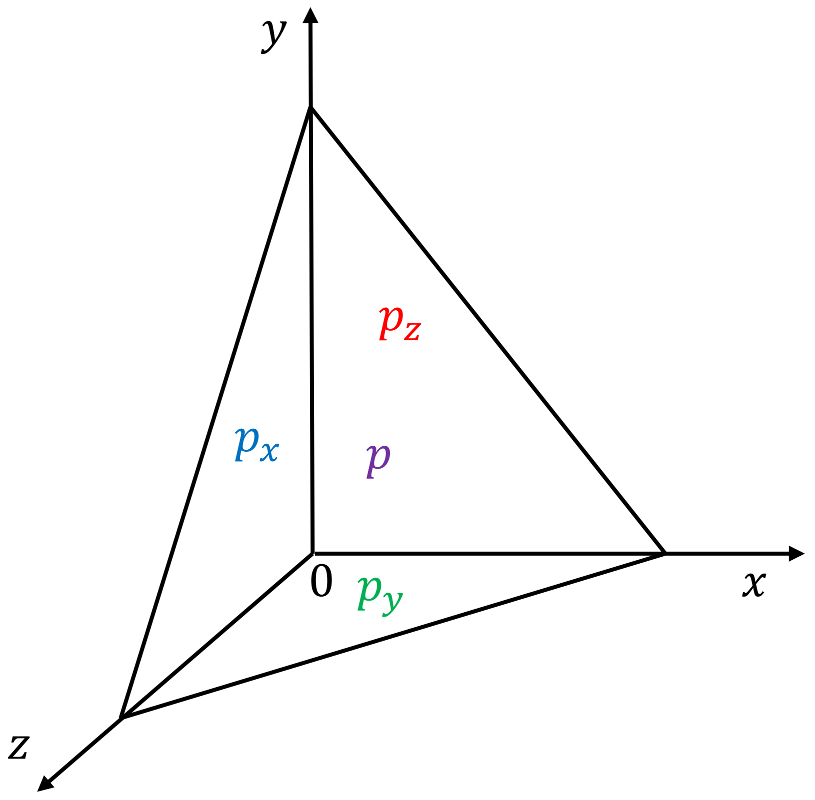
$$p_y \cdot dS \cdot cos\beta - p \cdot dS \cdot cos\beta = 0 \qquad p_z \cdot dS \cdot cos\gamma - p \cdot dS \cdot cos\gamma = 0$$

$$p = p_y \qquad p = p_z$$

Z podmínek statické rovnováhy sil plyne rovnost tlaků na plochách čtyřstěnu

$$p = p_x = p_y = p_z$$

Zákon o šíření tlaku v kapalinách



Z podmínek statické rovnováhy sil plyne rovnost tlaků na plochách čtyřstěnu

$$p = p_x = p_y = p_z$$

Šikmá plocha dS byla zvolena libovolně, tedy nezávisle na úhlech α, β, γ. Výsledek lze proto zevšeobecnit:

Tlak působí v daném místě kapaliny všemi směry stejně a nezávisí na sklonu plochy.

Tento zákon platí obecně a byl objeven Pascalem.

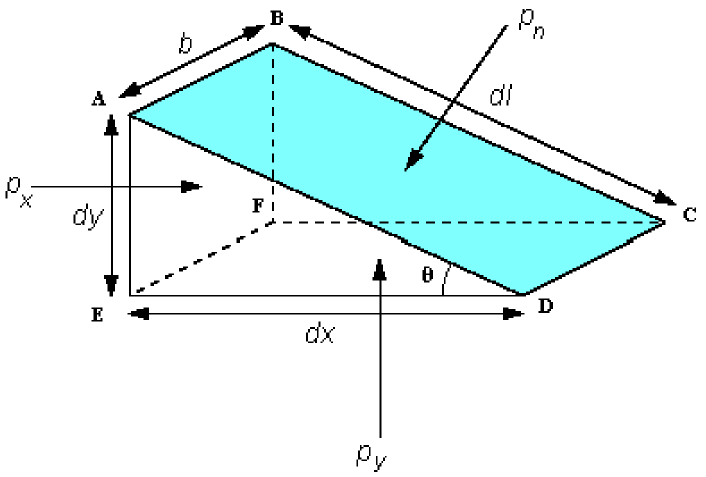
Je třeba poznamenat, že v jiném místě kapaliny bude hodnota tlaku obecně jiná, matematicky vyjádřeno funkcí $p = p(x, y, z)$, která se označuje jako funkce pro nestlačitelnou kapalinu.

Zákon o šíření tlaků v kapalinách

Tlak v určitém místě kapaliny působí všemi směry stejně a nezávisí na sklonu plochy, tzn. že tlak je směrově nezávislý.

Tlak je skalární veličina!

Blaise Pascal (1623-1662)



Silová rovnováha ve směru

x:

$$\Sigma\, dF_{px} = 0$$

$$p_x\, b\, dy = p_n\, b\, dl \sin\theta$$

$$dl \sin\theta = dy \Rightarrow p_x = p_n$$

y:

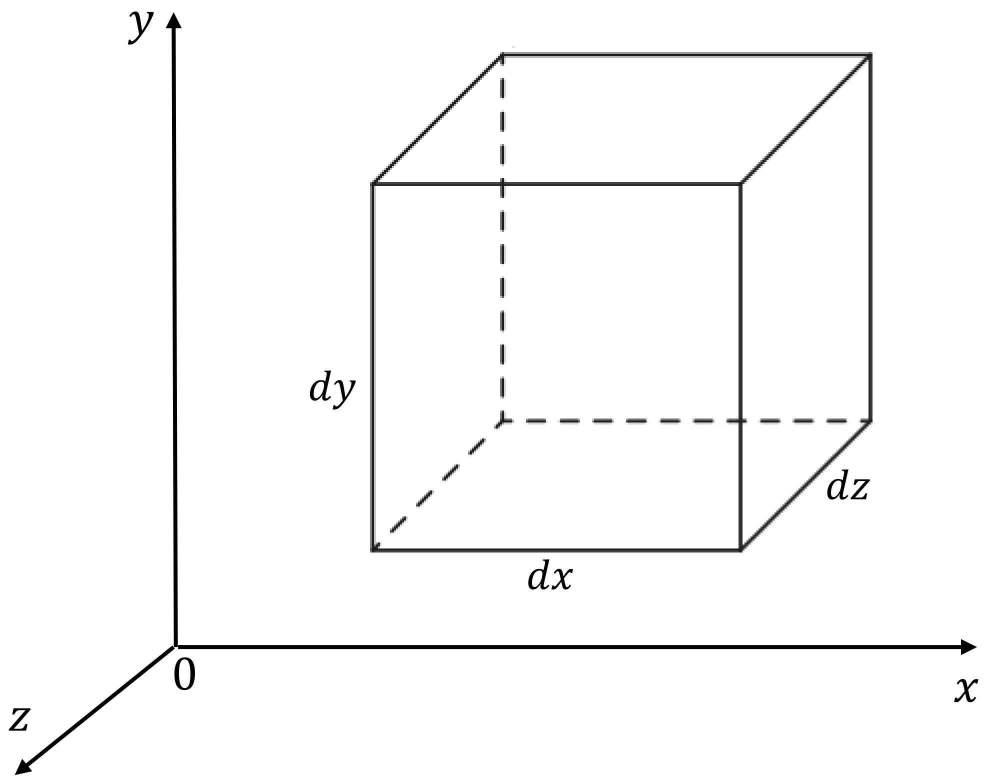
$$\Sigma\, dF_{py} = 0$$

$$p_y\, b dx = p_n b\, dl \cos\theta$$

$$dl \cos\theta = dx \Rightarrow p_z = p_n$$

$$\boxed{p_x = p_y = p_n = p}$$

Eulerova rovnice hydrostatiky



Eulerova rovnice **hydrostatiky** je obecná **rovnováha sil** působících na kapalinu **za klidu**.

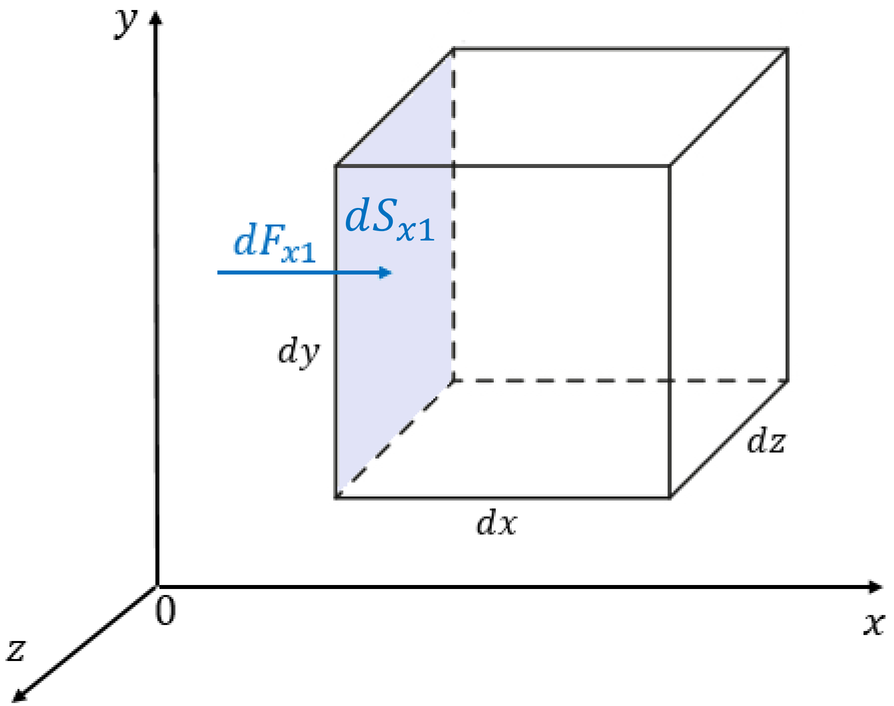
$$F_p + F_o = 0$$

kde F_p jsou síly plošné (tlakové) – např. $F_p = p \cdot S$
a F_o jsou síly objemové (hmotnostní) – např. $F_o = m \cdot g$

Zvolíme elementárním objemu kapaliny dV ve tvaru hranolu o stranách dx, dy a dz, rovnoběžných se zvolenými osami x, y, z.

Tlakové síly působí na povrch hranolu ve třech kolmých směrech. Protože plochy hranolu jsou nekonečně malé, můžeme uvažovat tlak konstantní.

Eulerova rovnice hydrostatiky



Eulerova rovnice **hydrostatiky** je obecná **rovnováha sil** působících na kapalinu **za klidu**.

$$F_p + F_o = 0$$

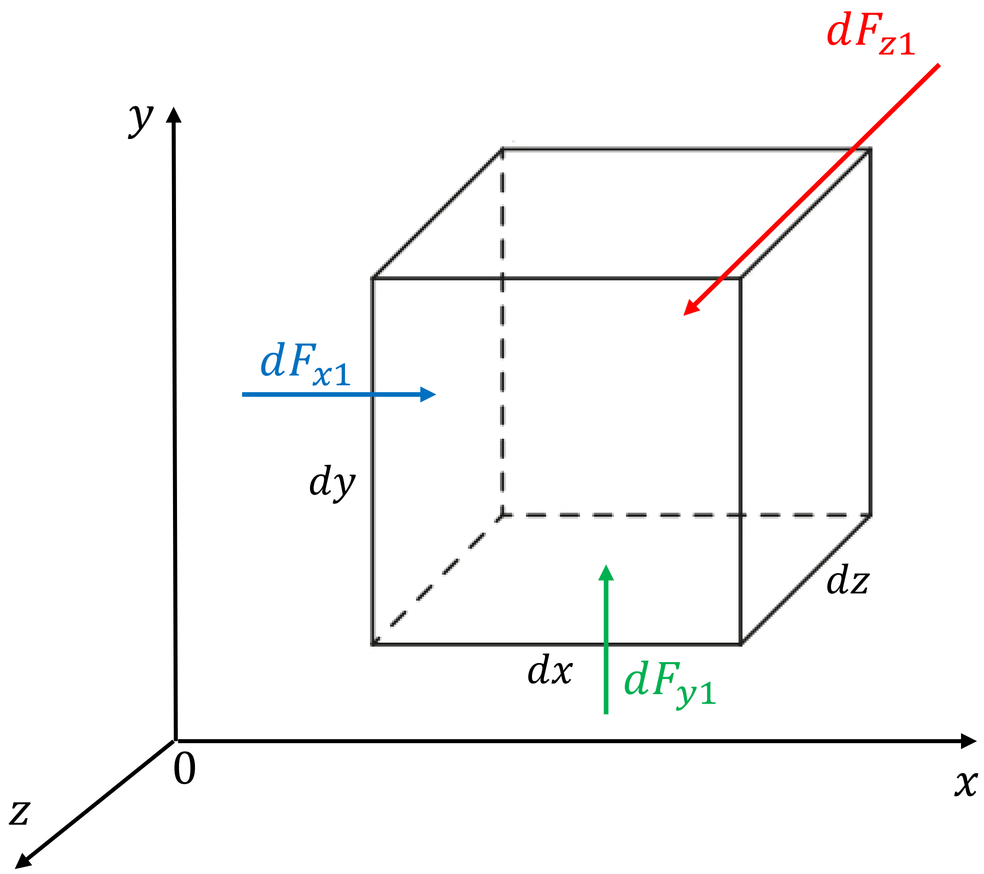
kde F_p jsou síly plošné (tlakové) – např. $F_p = p \cdot S$
a F_o jsou síly objemové (hmotnostní) – např. $F_o = m \cdot g$

Zvolíme elementárním objemu kapaliny dV ve tvaru hranolu o stranách dx, dy a dz, rovnoběžných se zvolenými osami x, y, z.

Tlakové síly působí na povrch hranolu ve třech kolmých směrech. Protože plochy hranolu jsou nekonečně malé, můžeme uvažovat tlak konstantní.

Na plochu $dS_{x1} = dy\, dz$ působí tlaková síla ve směru osy x a proto je označena dF_{x1}.

Eulerova rovnice hydrostatiky



Eulerova rovnice **hydrostatiky** je obecná **rovnováha sil** působících na kapalinu **za klidu**.

$$F_p + F_o = 0$$

kde F_p jsou síly plošné (tlakové) – např. $F_p = p \cdot S$
a F_o jsou síly objemové (hmotnostní) – např. $F_o = m \cdot g$

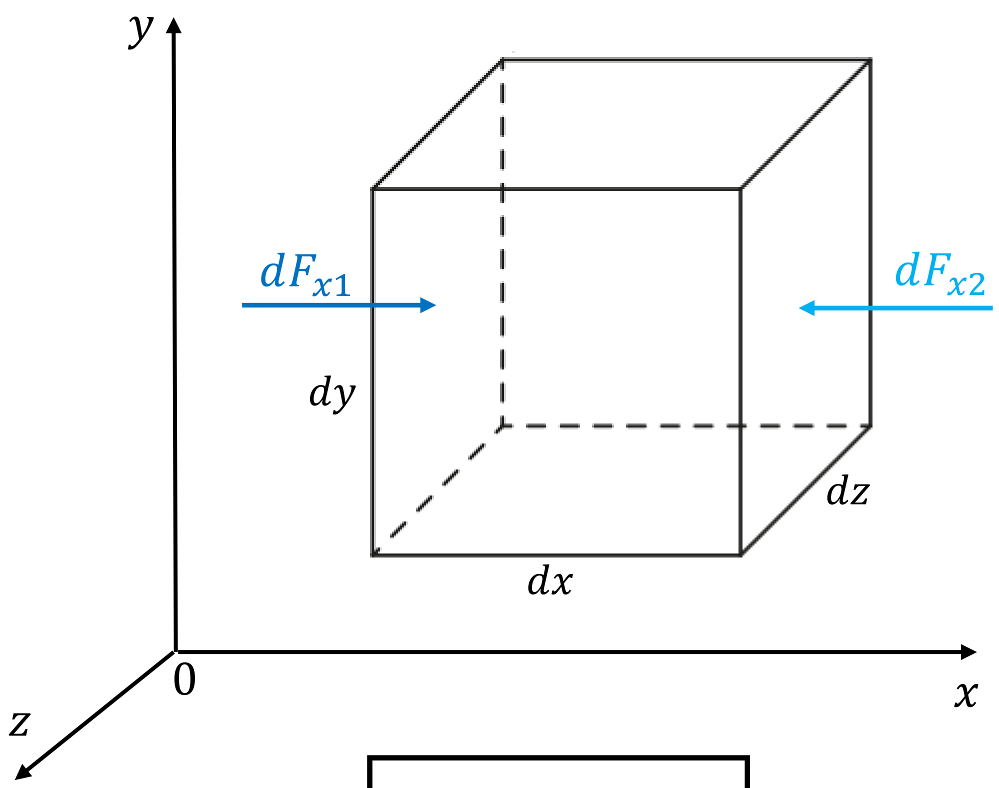
Zvolíme elementárním objemu kapaliny dV ve tvaru hranolu o stranách dx, dy a dz, rovnoběžných se zvolenými osami x, y, z.

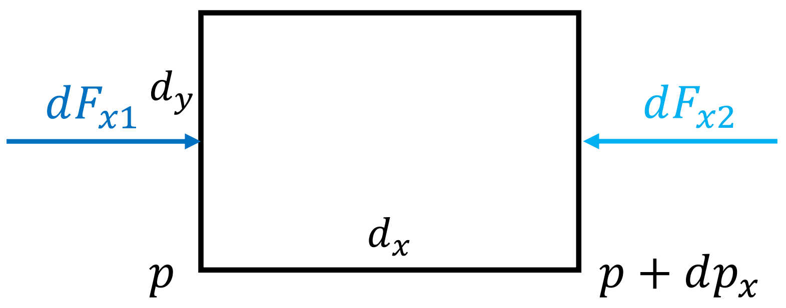
Tlakové síly působí na povrch hranolu ve třech kolmých směrech. Protože plochy hranolu jsou nekonečně malé, můžeme uvažovat tlak konstantní.

Na plochu $dS_{x1} = dy\,dz$ působí tlaková síla ve směru osy x a proto je označena dF_{x1}.

Podobně v ostatních směrech působí síly dF_{y1} a dF_{z1}.

Eulerova rovnice hydrostatiky





Podmínka rovnováhy vyplývá opět z obecných podmínek statické rovnováhy sil. Protože všechny síly působící na hranol procházejí jedním bodem (těžištěm hranolu), jsou splněny podmínky momentové rovnováhy.

Ve směru osy x působí na zvolený hranol tlakové síly dF_{x1} a dF_{x2} na dvě stejné plochy $dy\ dz$, jejichž normály jsou rovnoběžné s osou x.

Tlaková síla na levou plochu dS_{x1}, je určena velikostí této plochy a tlakem p

$$dF_{x1} = p\ dy\ dz$$

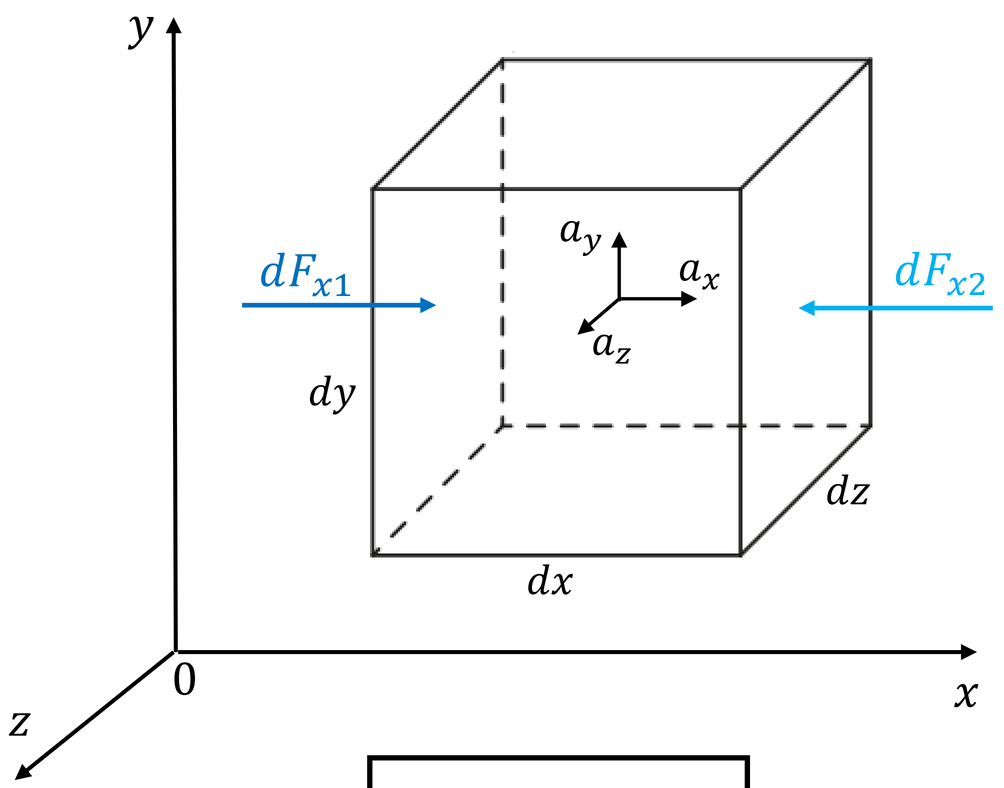
Na pravou plochu dS_{x2}, která je vzdálena od levé plochy o délku dx působí tlak $p + dp_x$ neboť obecně je tlak kapaliny funkcí polohy $p = p(x, y, z)$. Tlaková síla dF_{x2} je určena vztahem

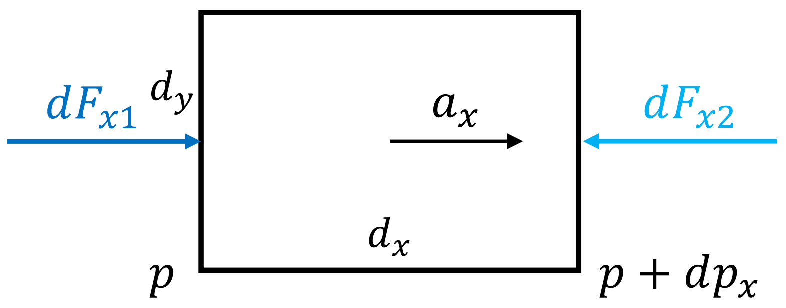
$$dF_{x2} = (p + dp_x)dy\ dz$$

Tlak z pravé strany působí opačným směrem, než je kladný směr osy x, proto výslednice uvedených sil:

$$dFp_x = dF_{x1} - dF_{x2}$$

Eulerova rovnice hydrostatiky





Kromě plošných (tlakových) sil, působí na zvolený hranol kapaliny hmotnostní síla.
Její složka ve směru osy x bude dána vztahem

$$dF_{ox} = a_x dm$$

Kde dm je hmotnost hranolu kapaliny a a_x je složka zrychlení (hmotnostní síla na jednotku hmoty) ve směru osy x.
Hmotnost se dá vyjádřit pomocí objemu hranolu

$$dF_{ox} = a_x dm = a_x \rho \, dV = a_x \rho \, dx \, dy \, dz$$

Pro rovnováhu ve směru osy x musí platit

$$dF_{px} + dF_{ox} = 0$$

$$dF_{x1} - dF_{x2} + dF_{ox} = 0$$

Po dosazení

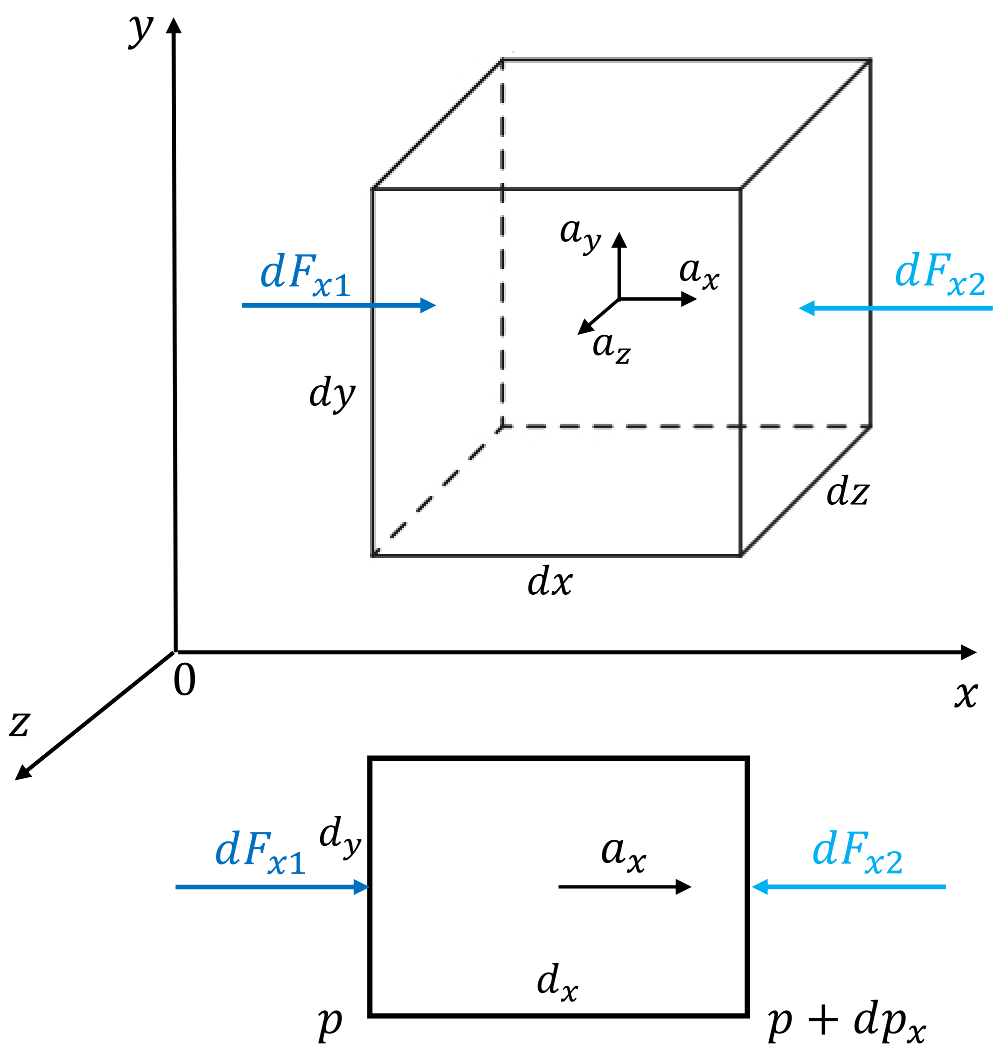
$$p \, dy \, dz - (p + dp_x) dy \, dz + a_x \rho \, dx \, dy \, dz = 0$$

Po úpravě

$$\rho a_x dx - dp_x = 0$$

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Eulerova rovnice hydrostatiky



$$\rho a_x dx - dp_x = 0$$

Protože tlak je obecně funkcí polohy, platí $p = p(x, y, z)$ a přírůstek tlaku je

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

Každý člen poslední rovnice udává změnu tlaku při diferenciální změně příslušných souřadnic. Jejich fyzikální význam je tedy přírůstek tlaku.

Při posunutí ve směru osy x je

$$dp_x = \frac{\partial p}{\partial x}dx$$

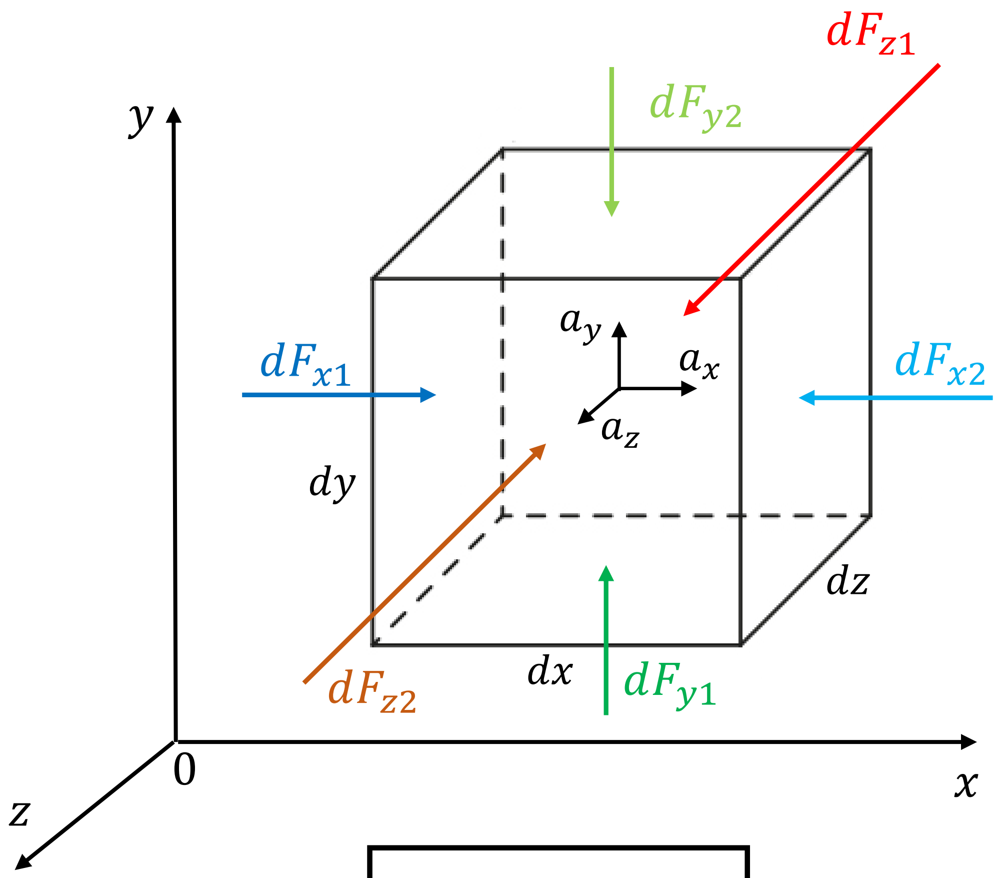
dp_x se dosadí do odvozené rovnováhy sil

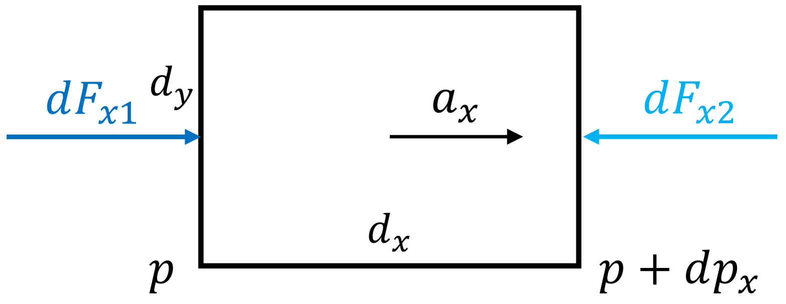
$$\rho a_x dx - \frac{\partial p}{\partial x}dx = 0$$

Po úpravě je obecná podmínka rovnováhy sil ve směru osy x

$$a_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Eulerova rovnice hydrostatiky





Po úpravě je obecná podmínka rovnováhy sil ve směru osy x

$$a_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Obdobně by se postupovalo ve směrech osy y a z.

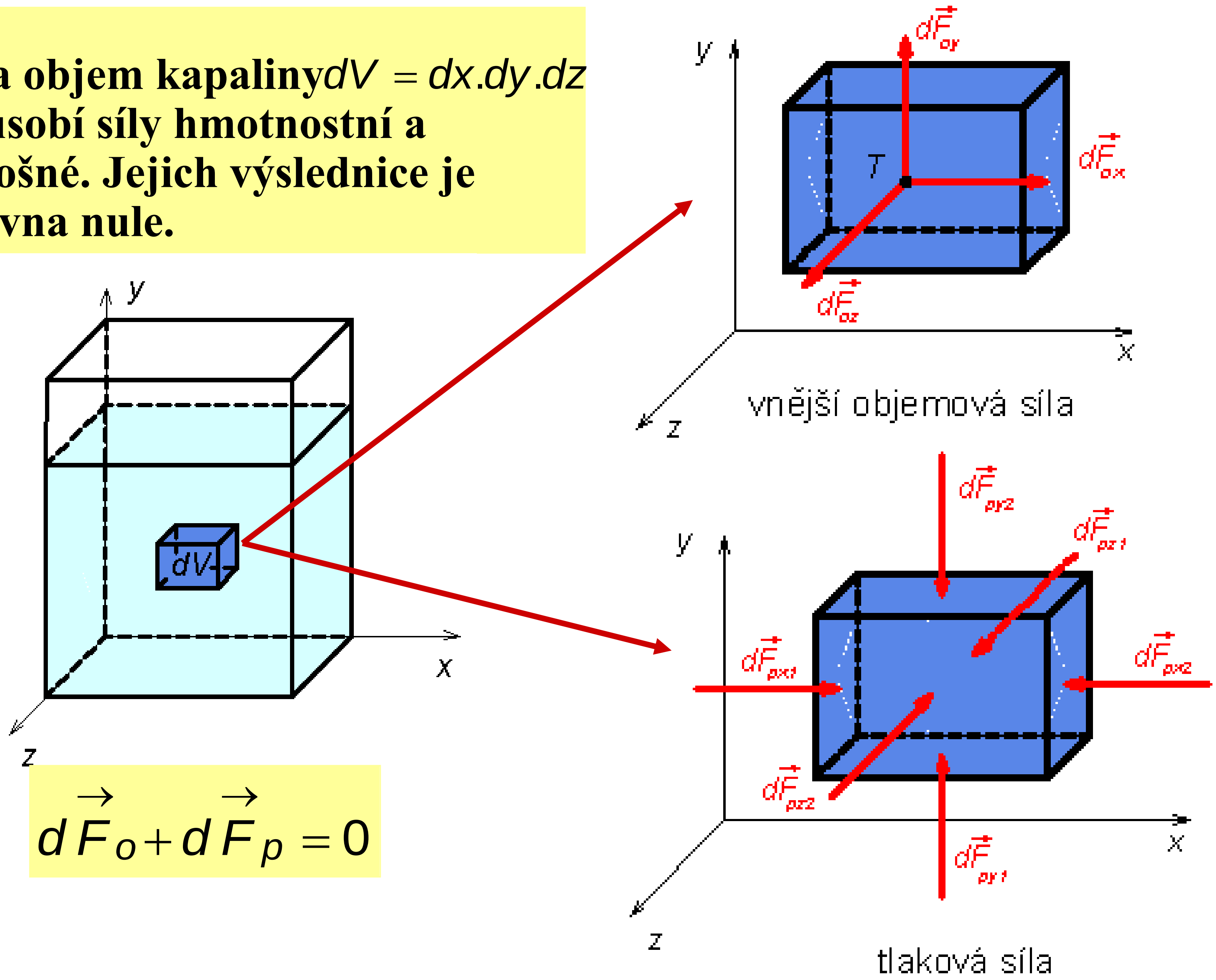
$$a_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad a_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Tyto tři rovnice vyjadřují podmínky rovnováhy kapalin za klidu a jsou to Eulerovy rovnice hydrostatiky.

Jestliže tyto tři rovnice zapíšeme vektorově a sečteme, dostaneme jednu rovnici

$$\boxed{\vec{a} - \frac{1}{\rho} grad\vec{p} = 0}$$

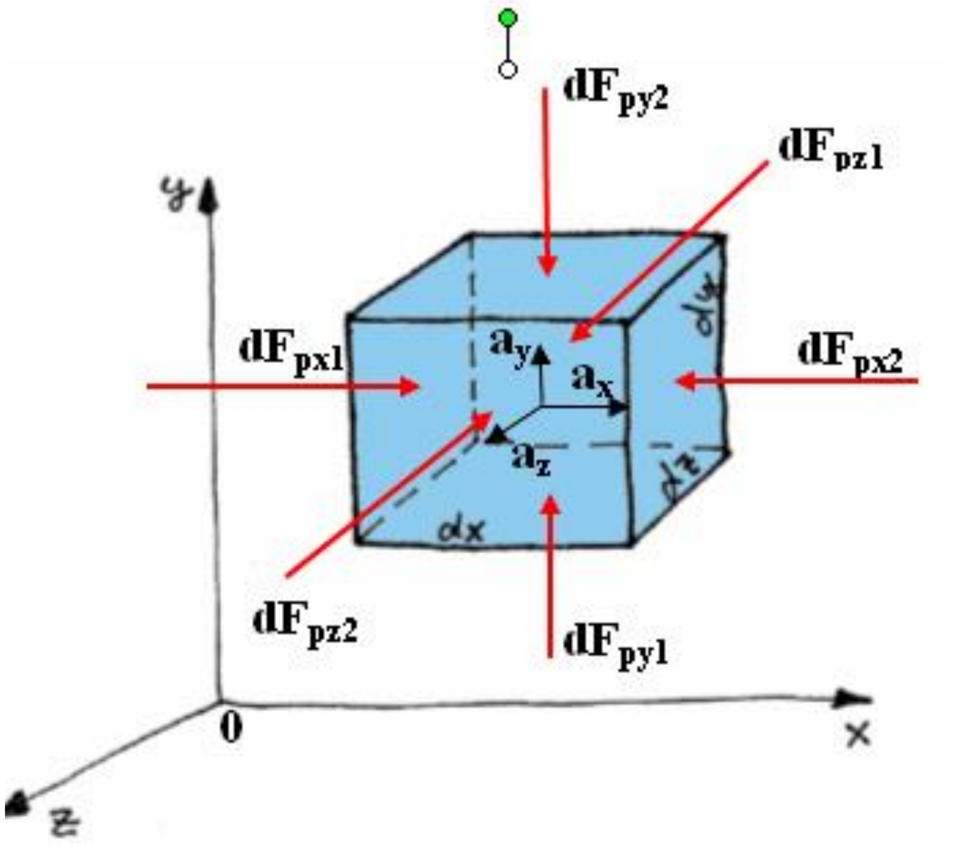
Na objem kapaliny $dV = dx.dy.dz$ **působí síly hmotnostní a plošné. Jejich výslednice je rovna nule.**



$$d\vec{F}_o + d\vec{F}_p = 0$$

Eulerova rovnice hydrostatiky

Eulerova rovnice hydrostatiky vyjadřuje **rovnováhu sil** působících na makroskopickou částici, za předpokladu, že kapalina se nachází hydrostatické rovnováze.



Leonhardo Euler (1707-1783)

$$d\vec{F}_o = \vec{a}\,dm = \vec{a}\,\rho\,dV$$

$$d\vec{F}_p = -p\,\vec{n}\,dS$$

Podmínka rovnováhy sil

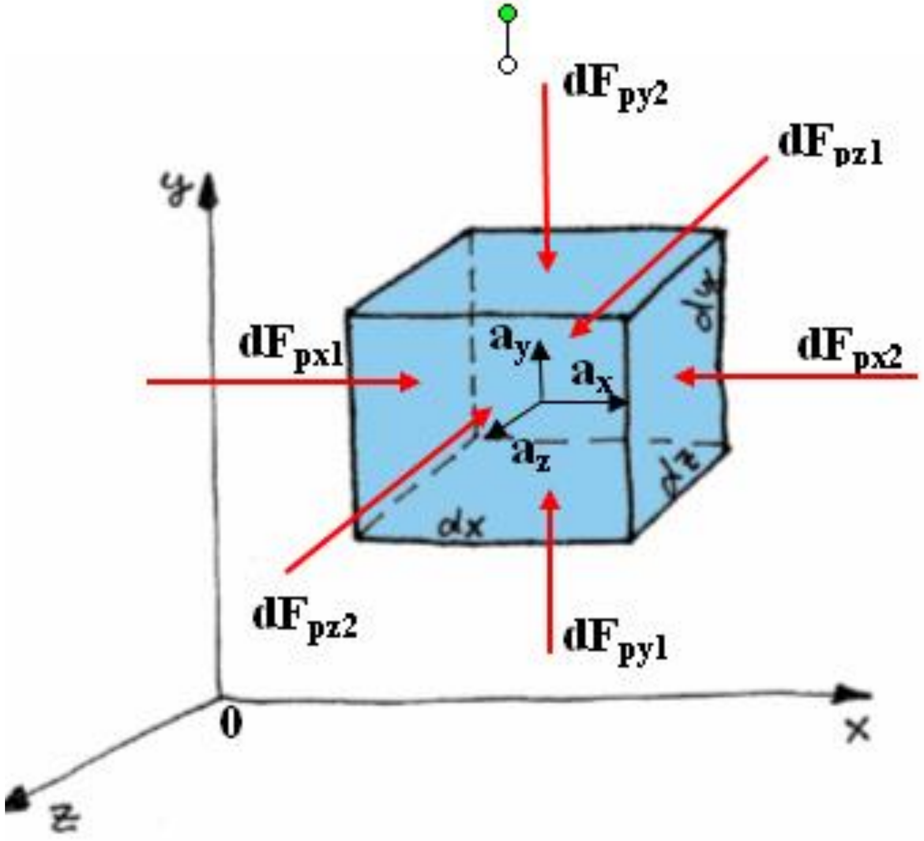
$$\Sigma\, dF_x = 0$$

$$\Sigma\, dF_y = 0$$

$$\Sigma\, dF_z = 0$$

Eulerova rovnice hydrostatiky

Eulerova rovnice hydrostatiky vyjadřuje **rovnováhu sil** působících na makroskopickou částici, za předpokladu, že kapalina se nachází hydrostatické rovnováze.



Leonhardo Euler (1707-1783)

$$d\vec{F}_o = \vec{a}\,dm = \vec{a}\,\rho\,dV$$

$$\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$$

$$\vec{F}_o = \iiint_V \vec{a}\,\rho\,dV$$

Protože **tlaková síla v hydromechanice je definována ve směru vnitřní normály**, je nutno tuto tlakovou sílu definovat se znaménkem mínus, tedy

$$d\vec{F}_p = -p\,\vec{n}\,dS$$

$$\vec{F}_p = \iint_S -p\,\vec{n}\,dS$$

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

$$\vec{F}_o + \vec{F}_p = 0$$

$$\iiint_V \vec{a}\,\rho\, dV - \iint_S p\vec{n}\, dS = 0$$

Plošný integrál součinu skaláru a vnější normály je možno nahradit objemovým integrálem gradientu skaláru:

$$\iiint_V \vec{a}\,\rho\, dV - \iiint_V \mathrm{grad}\,p\, dV = 0, \text{ kde} \qquad \mathrm{grad}\,p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

Rovnice platí pro libovolný objem, bude tedy platit i pro výraz pod integrálem

$$\vec{a}\,\rho - \mathrm{grad}\,p = 0$$ a po vydělení hustotou

$$\vec{a} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p = 0$$

Síly hmotnostní

Síly tlakové

Rovnici lze po vydělení hustotou rozepsat souřadnicemi do klasického diferenčního tvaru:

ve směru x: $$a_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \;\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \rho a_x$$

ve směru y: $$a_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \;\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = \rho a_y$$

ve směru z: $$a_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \;\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = \rho a_z$$

Eulerova rovnice hydrostatiky je základní rovnicí k určení tlaků v poli tlakových sil. Z Eulerovy rovnice vyplývá, že tlak v kapalině závisí na hmotnostních silách.

Diferenciální rovnice pro tlakovou funkci

Obecně lze psát změnu tlaku pomocí totálního diferenciálu

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

Poněvadž derivace tlaku ve všech směrech se dají vyjádřit hmotnostními silami z Eulerových rovnic, dostaneme po dosazení obecnou diferenciální rovnici funkce tlaku

$$\boxed{dp = \rho\left(a_x dx + a_y dy + a_z dz\right)}$$

Integrací pak dostáváme funkci tlaku

$$p = \int \rho\left(a_x.dx + a_y.dy + a_z.dz\right) = p\left(x, y, z\right)$$

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

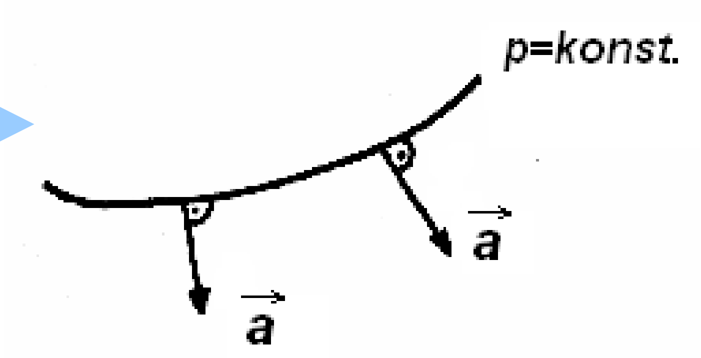
Tlakové hladiny

Tlaková hladina je plocha, kde je tlak konstantní. Platí pro ni tato diferenciální rovnice:

$$dp = 0 \quad \Rightarrow \rho\left(a_x dx + a_y dy + a_z dz\right) = 0, \quad tedy$$

$$\boxed{a_x dx + a_y dy + a_z dz = 0}$$

Objemové zrychlení (objemová jednotková síla) je na tlakovou hladinu kolmé



Hladinové plochy mají v úlohách hydrostatiky velký význam, především však hladinová plocha rozhraní mezi okolním ovzduším a kapalinou. Jsou to plochy konstantního potenciálu, teploty, hustoty.

Přírůstek tlaku v kapalině

Nestlačitelná kapalina v klidu za působení zemské tíže

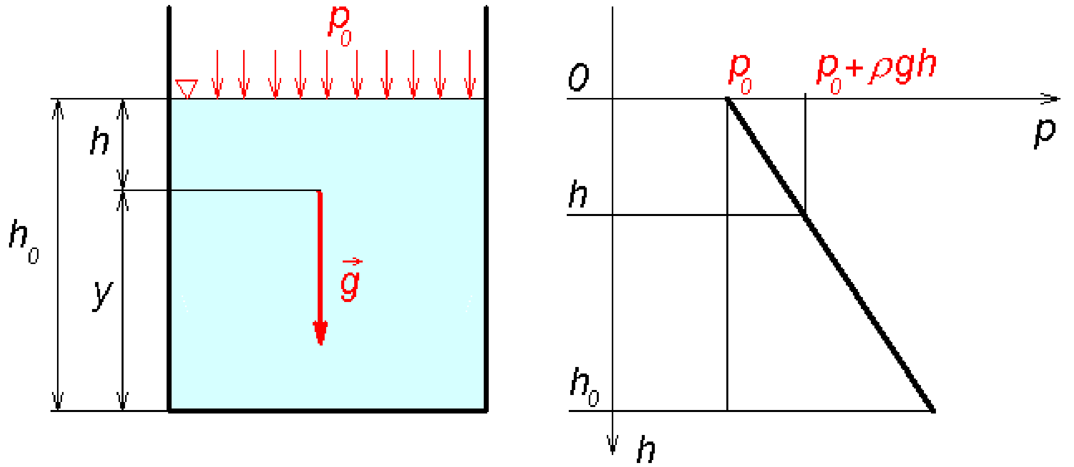
Přírůstek tlaku můžeme vyjádřit již zmiňovanou rovnicí:

$$dp = \rho\left(a_x dx + a_y dy + a_z dz\right)$$

$$a_y = -g$$

$$a_x = a_z = 0$$

$$dp = -\rho \cdot g dy$$



Po integraci:

$$p = -\rho \cdot gy + konst$$

Okrajové podmínky:

$$y = h_0, \quad p = p_0$$

$$konst = p_0 + \rho g h_0$$

$$p = -\rho g y + p_0 + \rho g h_0 = p_0 + \rho g\left(h_0 - y\right) = p_0 + \rho g h$$

$$\boxed{p = \rho g h}$$

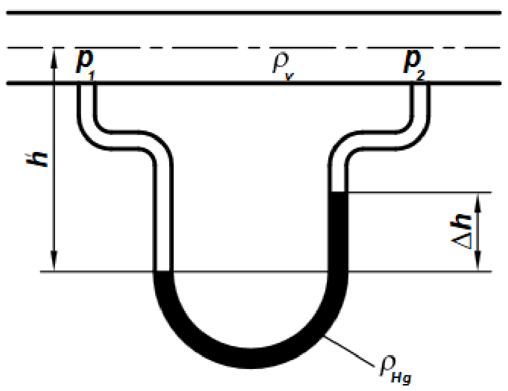
hydrostatický tlak

U tohoto typu příkladu můžeme U-trubici rozdělit vertikálně na dvě části – levou a pravou
Následně sčítáme tlaky na jednotlivých stranách trubice

Příklad 3.2.2

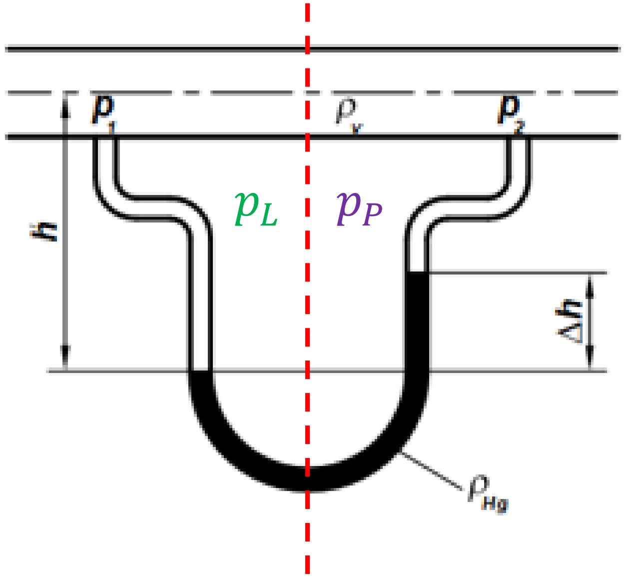
Jaký je rozdíl tlaků Δp ve vodorovném potrubí (ve kterém proudí voda), který je měřen U-trubicí naplněnou rtutí. Rozdíl výšek hladin je Δh.

Zadáno:		
Δh =	0.35 m	
ρ_v =	1000 kg.m^{-3}	
ρ_{Hg} =	13600 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
Δp = ?	Pa	43262.10



Platí rovnost tlaků na obou stranách, využijeme vztah pro výpočet hydrostatického tlaku

$$p_L = p_P$$



$$p_L = p_P$$

$$p_1 + \rho_v \cdot g \cdot h = p_2 + \rho_v \cdot g \cdot (h - \Delta h) + \rho_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h$$

Chceme vypočítat rozdíl tlaků $\Delta p = p_1 - p_2$, převedeme tlaky na jednu stranu

$$p_1 - p_2 = \rho_v \cdot g \cdot (h - \Delta h) + \rho_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h - \rho_v \cdot g \cdot h$$

Po roznásobení závorky na pravé straně rovnice

$$p_1 - p_2 = \rho_v \cdot g \cdot h - \rho_v \cdot g \cdot \Delta h + \rho_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h - \rho_v \cdot g \cdot h$$

Červené výrazy se od sebe odečtou, jsou stejné. Ze zbytku na pravé straně můžeme vytknout před závorku g a Δh

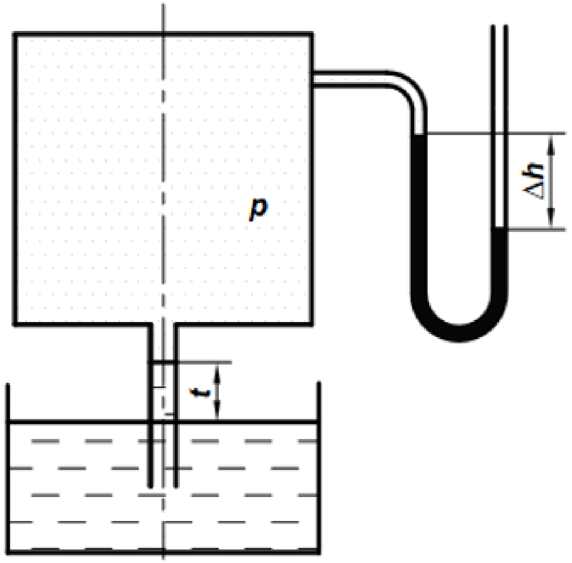
$$\Delta p = g \cdot \Delta h \cdot (\rho_{Hg} - \rho_v)$$

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Příklad 3.3.4

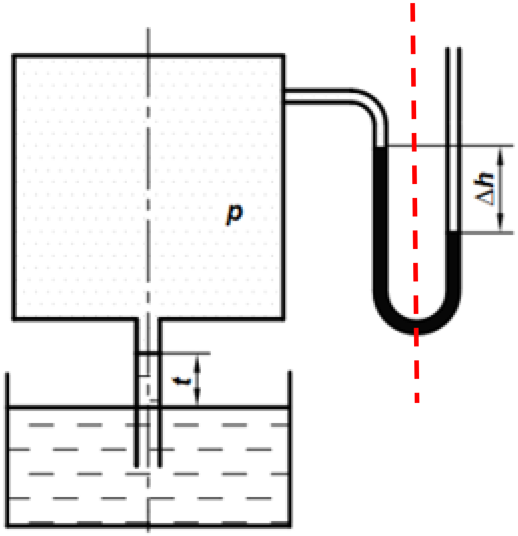
Určete tlak plynu v plynojemu jestliže v U – trubici naplněné lihem je rozdíl hladin Δh. Do jaké výšky vystoupí hladina vody v trubici, kterou je plynojem spojen s vodní nádrží?

Zadáno:			
$\Delta h =$	0.02 m		
$p_0 =$	0.101 MPa		
$\rho_{lih} =$	800 kg.m^{-3}		
$\rho_{voda} =$	1000 kg.m^{-3}		
Vypočtěte:			Výsledky:
p = ?		MPa	0.10084
t = ?		m	0.01631

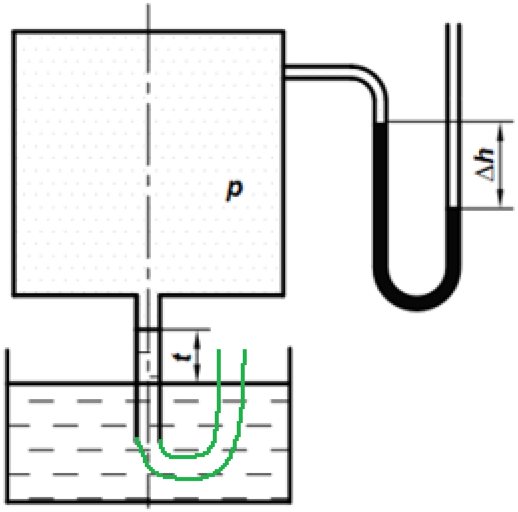


Řešení je obdobné jako v předchozím příkladu, u pravé U-trubice je obecný vztah z rovnosti tlaků

$$p + \rho_{lih} \cdot g \cdot \Delta h = p_0$$
$$p = p_0 - \rho_{lih} \cdot g \cdot \Delta h$$



Pro zjištění, do jaké výšky vystoupí hladina vody ve spodní trubic budeme opět využívat tlakových ploch a můžeme si představit, jakoby spodní trubice byla také U-trubicí a sčítat tlaky na obou stranách.



$$p + \rho_v \cdot g \cdot t = p_0$$
$$t = \frac{p_0 - p}{\rho_v \cdot g}$$

V plynojemu je podtlak, to je patrné už z obrázku.

Pascalův zákon a hydraulický lis

U hydraulických lisů, hydraulických pohonů, hydraulického akumulátoru, atd. můžeme objemové síly zanedbat vůči silám plošným (tlakovým).

Blaise Pascal (1623-1662)

Eulerova rovnice HS: $$\vec{a} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p = 0$$

$$\vec{F}_o \ll \vec{F}_p$$

$$\vec{a} \ll \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p = 0$$

Předpokládáme-li že ρ = konst., pak Eulerova rovnice hydrostatiky má tvar:

$$grad(p) = 0 \Rightarrow p = konst$$

Tlak vyvolaný vnější silou v kapalině je ve všech směrech a ve všech místech stejný

Hydraulický lis – nádoba se 2 písty různých průměrů

Pascalův zákon je základem hydraulických zařízení, která využívají přenosu tlaku a tím i tlakové síly od jednoho pístu k druhému. Velikostí plochy pístu lze ovlivnit i velikost tlakové síly. Tlak na obou pístech je stejný, síla na výstupu je mnohonásobně větší.

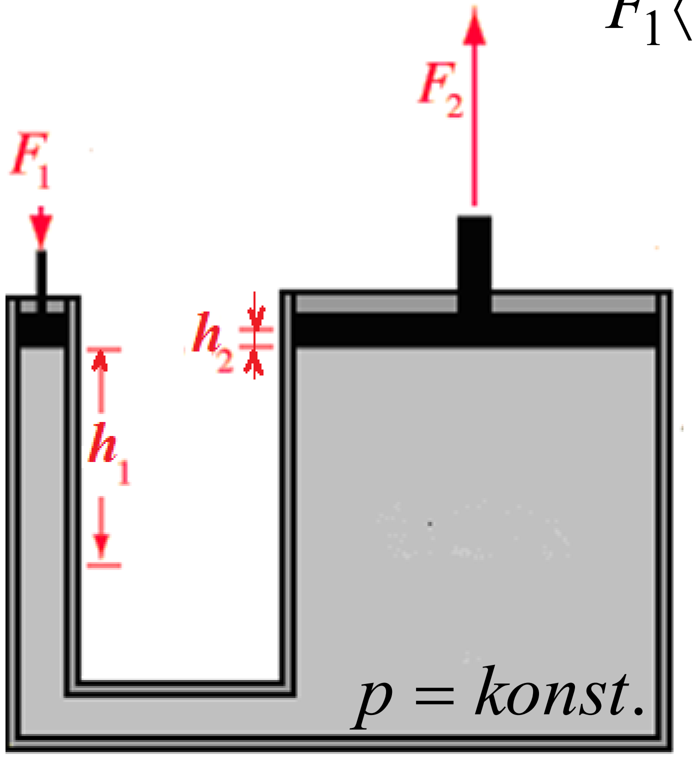
$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}$$

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}$$

$$F_1 h_1 = F_2 h_2 \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{h_2}{h_1}$$

$$h_2 = \frac{F_1}{F_2} h_1 = \frac{S_1}{S_2} h_1$$

$F_1 \langle F_2$

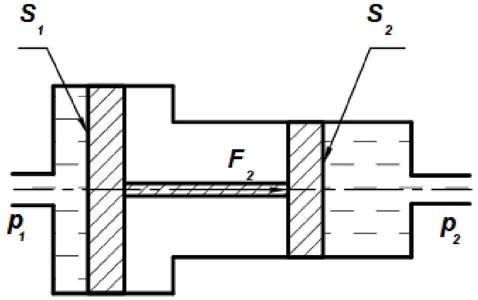


Příklad 3.3.2

Dva válce o různých velikostech jsou pevně spojeny tyčí. Jestliže na plochu S_1 působí tlak daný p_1, pak na tuto plochu působí síla F_1, která je přenášena na plochu S_2 a na výstupu se získá tlak p_2. Určete hodnotu tohoto tlaku.

<u>Zadáno:</u>

S_1 =	20 cm^2	
S_2 =	16 cm^2	
p_1 =	1 MPa	
<u>Vypočtěte:</u>		<u>Výsledky:</u>
p_2 = ?	Pa	1 250 000.0



Mezi písty je tuhá vazba, tedy síly na obou stranách pístu musí být stejné.

$$F_1 = F_2$$

Z Pascalova zákona

$$p = \frac{F}{S} \rightarrow F = p \cdot S$$

$$p_1 \cdot S_1 = p_2 \cdot S_2$$

$$p_2 = \frac{p_1 \cdot S_1}{S_2}$$

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Velmi jednoduchý, u studentů problematický příklad.
Využijeme Pascalův zákon a hydrostatický tlak.
Aby byly oba písty v rovnováze, znamená to že síly na obou stranách musí být stejné.

$$F_1 = F_2$$

$$p_1 \cdot S_1 = p_2 \cdot S_2$$

$$\rho \cdot g \cdot (H-h) \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \rho \cdot g \cdot H \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$\frac{D}{d} = 3 \rightarrow D = 3d$$

$$\cancel{\rho} \cdot \cancel{g} \cdot (H-h) \cdot \frac{\cancel{\pi} \cdot 3^2 \cdot \cancel{d^2}}{\cancel{4}} = \cancel{\rho} \cdot \cancel{g} \cdot H \cdot \frac{\cancel{\pi} \cdot \cancel{d^2}}{\cancel{4}}$$

$$9(H-h) = H$$

$$9H - 9h = H$$

$$9h = 8H$$

$$h = \frac{8}{9} H = \frac{32}{9}$$

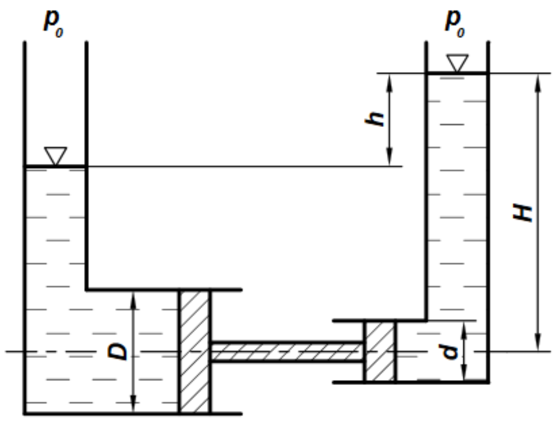
Příklad 3.3.3

Táhlem spojené písty silového zařízení se ustálí v poloze naznačené na obrázku. Určete h, je-li dán poměr $\frac{D}{d}$ a H.

Zadáno:

$\frac{D}{d}$ =	3
H =	4 m
ρ =	1000 kg.m^{-3}

Vypočtěte:		Výsledky:
h = ?	m	3.56



Síly na rovinné plochy

Síla na vodorovnou rovinnou plochu

Síla na šikmou rovinnou plochu

Síla na svislou rovinnou plochu

Síly na křivé plochy

Metoda složková

Metoda náhradních ploch

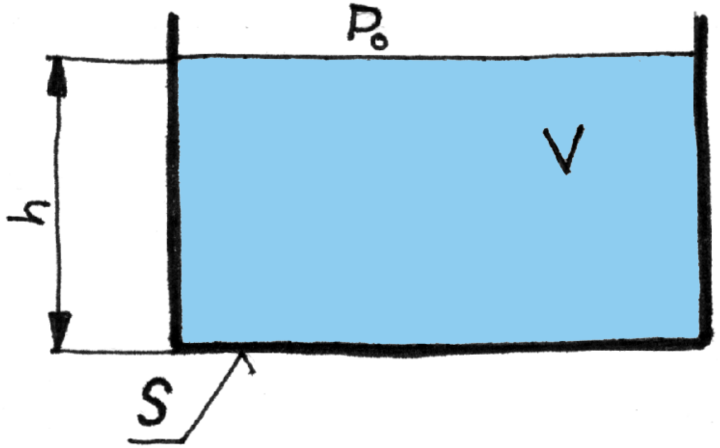
Archimédův zákon

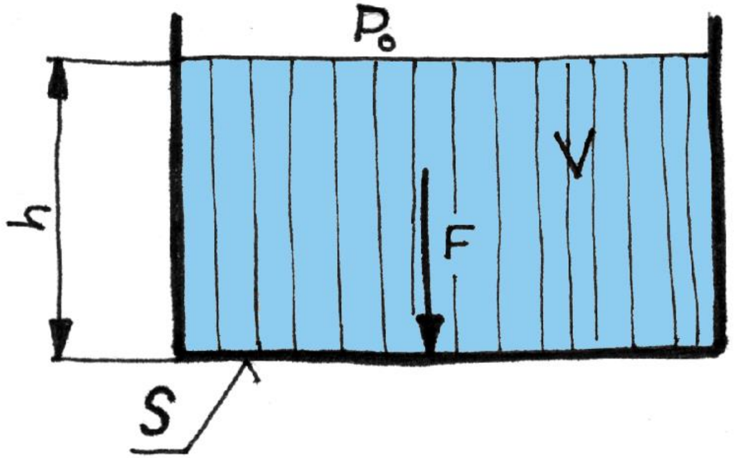
VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Síla na vodorovnou plochu

Příklad: Síla na vodorovné dno nádoby *S*

Tlak je na ploše rovnoměrně rozložen.





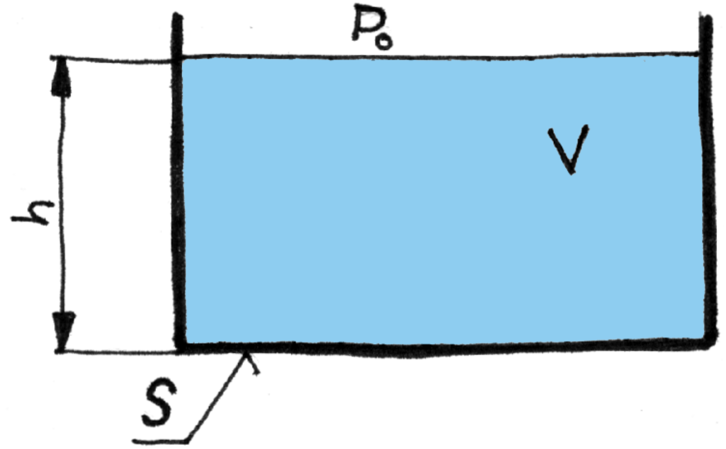
Síla na vodorovnou plochu

Příklad: Síla na vodorovné dno nádoby *S*

Tlak je na ploše rovnoměrně rozložen.

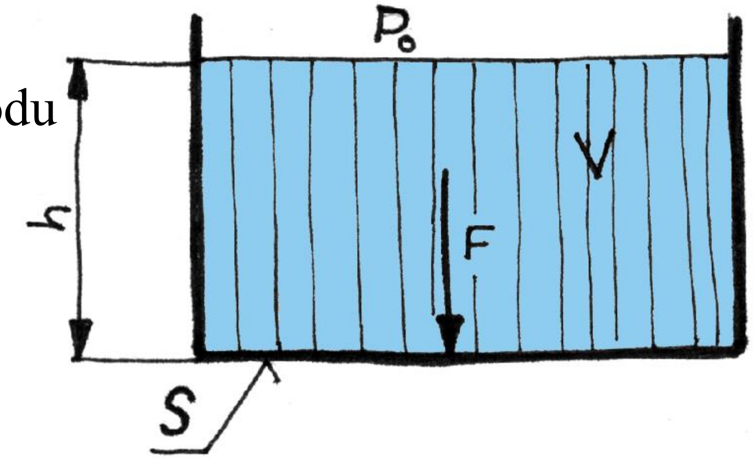
$$h = konst, \quad p = \rho \cdot g \cdot h = konst$$

$$\boxed{F = p \cdot S = \rho \cdot g \cdot h \cdot S = g \cdot \rho \cdot V}$$



$\boxed{V}$ je zatěžovací objem, který je vymezen:

1) plochou , na níž počítáme tlakovou sílu
2) tlakovou hladinou tlaku ovzduší
3) pláštěm (válce nebo hranolu), který vytvoří přímky rovnoběžné s vektorem síly po obvodu plochy *S*.

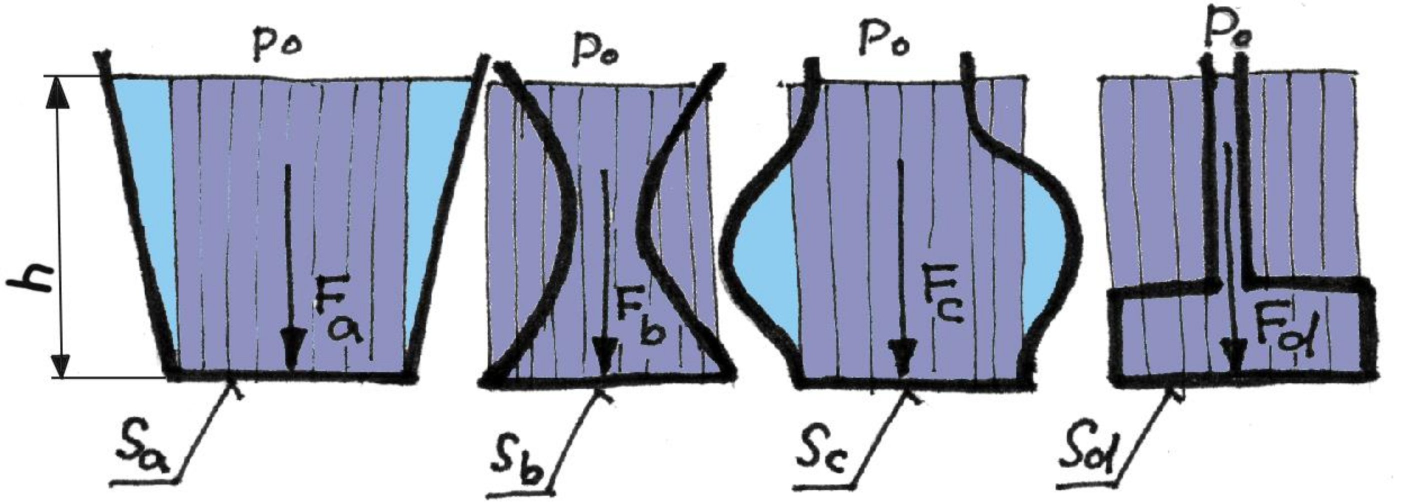


$\boxed{F}$ je síla, která má směr normály k ploše a je orientovaná z kapaliny.
Síla *F* prochází těžištěm zatěžovacího objemu
Působiště síly *F* je v těžišti plochy *S*.

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Hydrostatické paradoxon

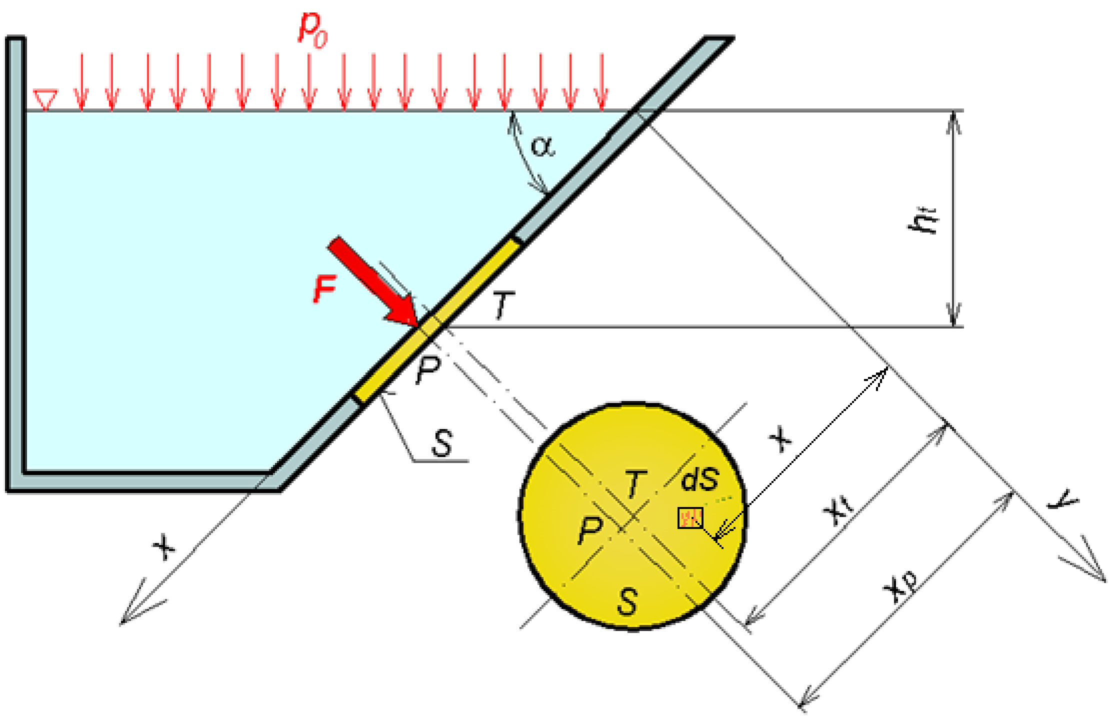
Velikost síly F na dno nezávisí na tvaru bočních stěn nádoby.



$$h_a = h_b = h_c = h_d \qquad S_a = S_b = S_c = S_d \qquad F_a = F_b = F_c = F_d$$

Tlaková síla na šikmou plochu

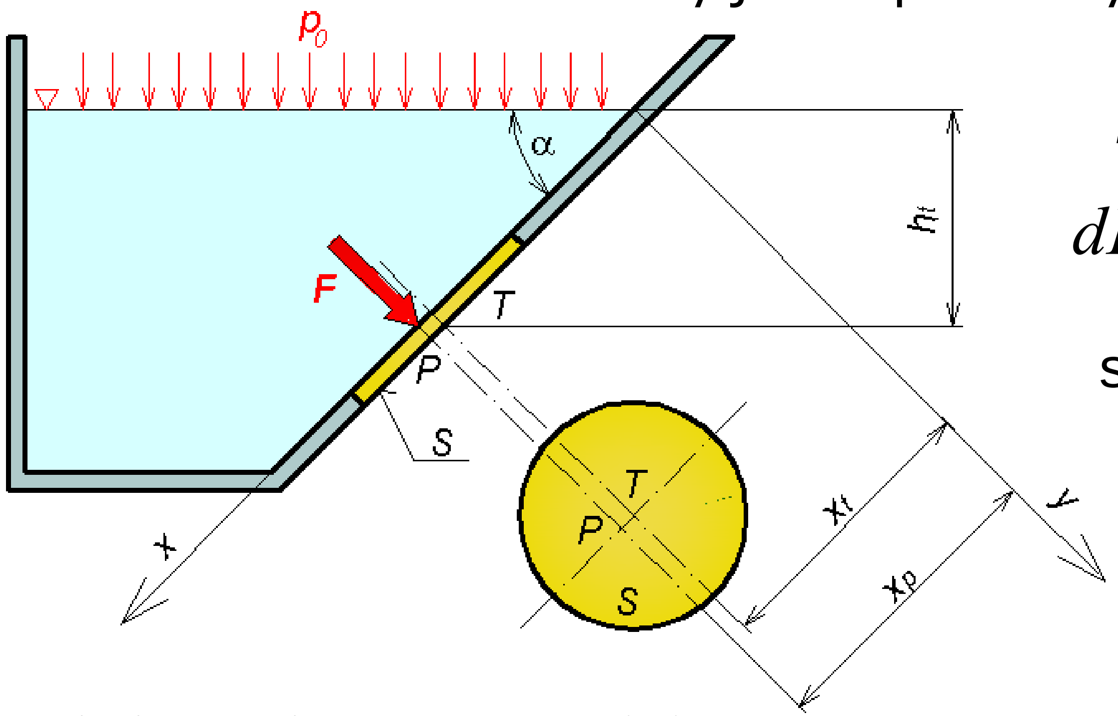
Na šikmé rovinné stěně nádoby je tlak proměnný



VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Tlaková síla na šikmou plochu

Na šikmé rovinné stěně nádoby je tlak proměnný



$$h \neq konst \Rightarrow p \neq konst$$

$$dF = p \cdot dS = \rho \cdot g \cdot h \cdot dS$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x \sin\alpha$$

Výslednou sílu musíme určit integrací:

$$F = \int_S p \cdot dS = \rho g \int_S h dS = \rho g \sin\alpha \int_S x\, dS$$

$kde\ M_y = \int_S x\, dS = x_t S$ je statický moment plochy S k ose y.

$$\boxed{F = \rho \cdot g \cdot h_t \cdot S = p_t S}$$

Působiště určíme z momentové rovnováhy k osám x,y:

$$M_y = Fx_p = \int_S dM_y = \int_S x dF = \rho g \sin\alpha \int_S x^2 dS = \rho g \sin\alpha J_y$$

$$x_p = \frac{\rho g \sin\alpha J_y}{F} = \frac{\rho g \sin\alpha J_y}{\rho g x_t \sin\alpha S} = \frac{J_y}{M_y}$$

Podle Steinerovy věty je $J_y = J_{yt} + S.x_t^2$, takže

$$x_p = \frac{J_{yt} + Sx_t^2}{M_y} = \frac{J_{yt}}{Sx_t} + \frac{Sx_t^2}{Sx_t} = \frac{J_{yt}}{M_y} + x_t, \quad kde\ \frac{J_{yt}}{M_y} = \Delta x$$

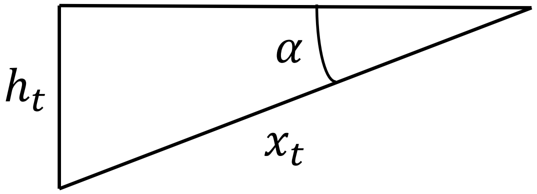
Podobně se určí druhá souřadnice působiště tlakových sil z momentů k ose x:

$$M_x = Fy_p = \int_S dM_x = \int_S y dF = \rho g \sin\alpha \int_S xy dS = \rho g \sin\alpha J_{xy}$$

$$y_p = \frac{\rho g \sin\alpha J_{xy}}{F} = \frac{\rho g \sin\alpha J_{xy}}{\rho g x_t \sin\alpha S} = \frac{J_{xy}}{M_y}$$

J_{xy} je deviační moment plochy S k osám x, y,

$$F = \rho \cdot g \cdot h_t \cdot S$$

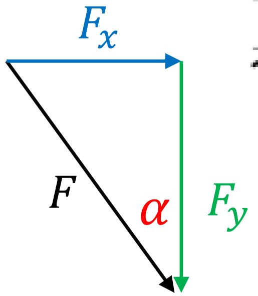


$$sin\alpha = \frac{h_t}{x_t} \rightarrow h_t = sin\alpha \cdot x_t$$

$$x_p = x_t + \frac{J_{yt}}{M_y}$$

$$J_{yt} = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$$

$$M_y = x_t \cdot S$$



$$cos\alpha = \frac{F_y}{F} \rightarrow F_y = F \cdot cos\alpha$$

Příklad 4.2.1

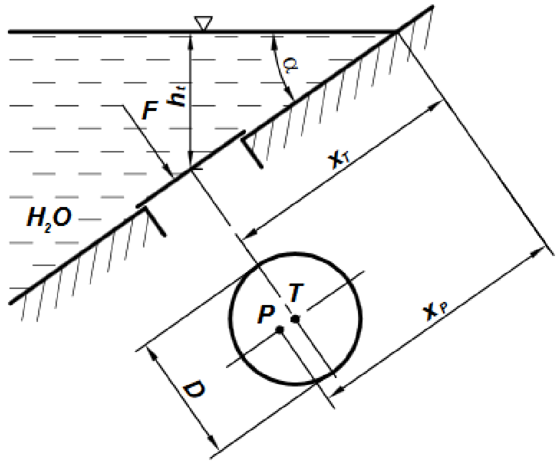
Stanovte velikost tlakové síly F na kruhové víko výpustě a vzdálenost působiště tlakové síly x_p.

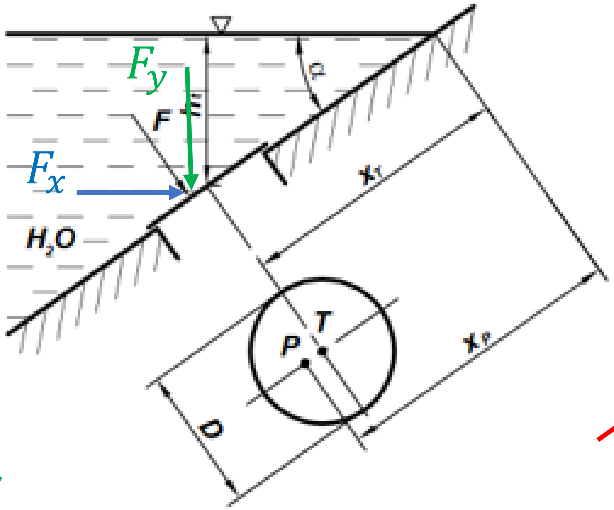
Určete svislou složku tlakové síly F_y.

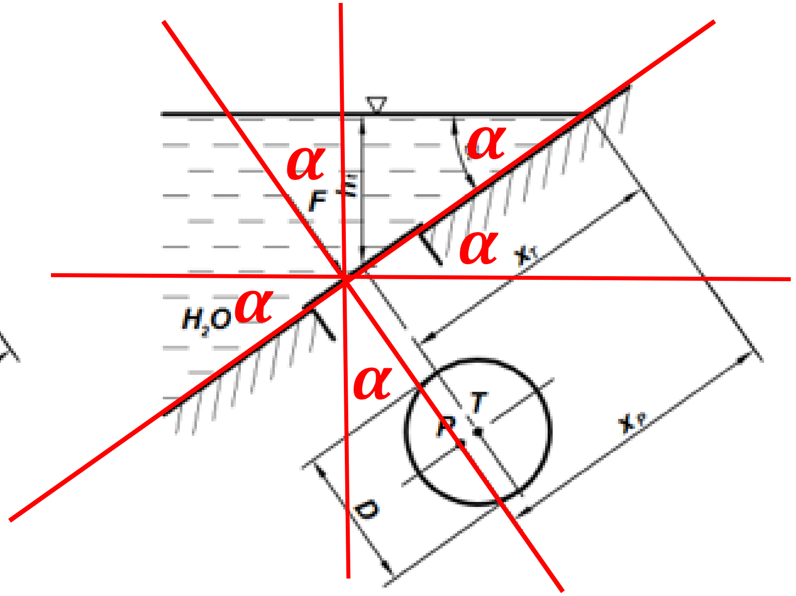
Zadáno:

D	=	1 m
x_T	=	1.8 m
α	=	40 deg
ρ	=	1000 kg.m^{-3}

Vypočtěte:		Výsledky:
F = ?	N	8914.54
x_p = ?	m	1.83472
F_y = ?	N	6828.93

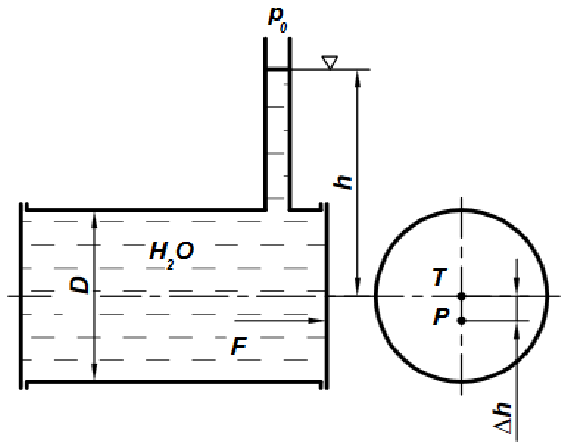






Příklad 4.2.2

Stanovte velikost síly F na kruhové víko nádrže, jestliže v připojené trubce je hladina ve výšce h. Vypočtěte vzdálenost Δh působiště P tlakové síly od těžiště T plochy. Nakreslete zatěžovací obrazec. Měrnou hmotnost vody uvažujte ρ.



Zadáno:			
h =	1.4 m		
D =	0.8 m		
ρ =	1000 kg.m^{-3}		
Vypočtěte:			**Výsledky:**
F = ?		N	6 903.46
Δh = ?		m	0.02857

$$h = h_t$$

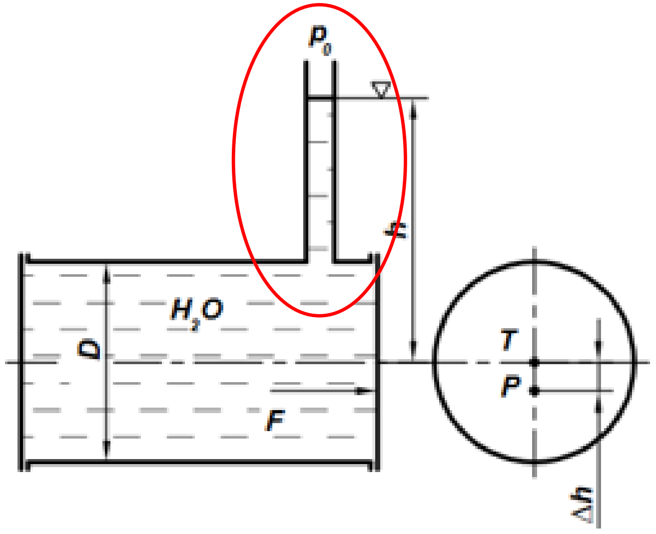
$$F = \rho \cdot g \cdot h_t \cdot S = \rho \cdot g \cdot h_t \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$\Delta h = x_p - h$$

$$x_p = x_t + \frac{J_{yt}}{M_y}$$

$$J_{yt} = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$$

$$M_y = x_t \cdot S$$



$$F = \rho \cdot g \cdot h_t \cdot S = \rho \cdot g \cdot h_t \cdot a^2$$

$$x_p = h_p = h_t + \frac{J_{yt}}{M_y}$$

$$J_{yt} = \frac{a^4}{12}$$

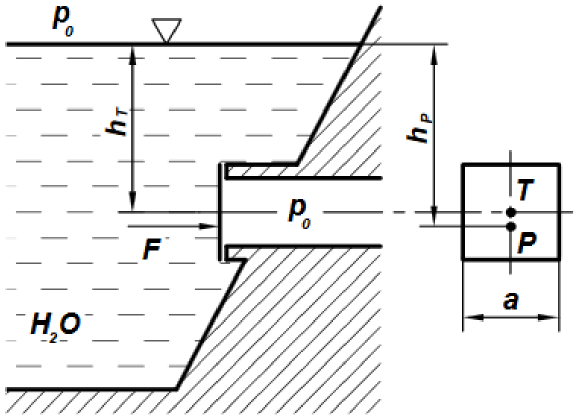
$$M_y = x_t \cdot S = h_t \cdot a^2$$

$$p = \rho \cdot g \cdot h_t \quad \text{nebo} \quad p = \frac{F}{S}$$

Příklad 4.2.3

Stanovte tlakovou sílu F a vzdálenost jejího působiště h_p pro čtvercové víko kanálu v hloubce h_T pod hladinou (p_0 = konst.). Určete střední hodnotu tlaku p na víko.

Zadáno:		
h_T =	1.6 m	
a =	1 m	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
F = ?	N	15 696.00
h_p = ?	m	1.65208
p = ?	Pa	15 696.00



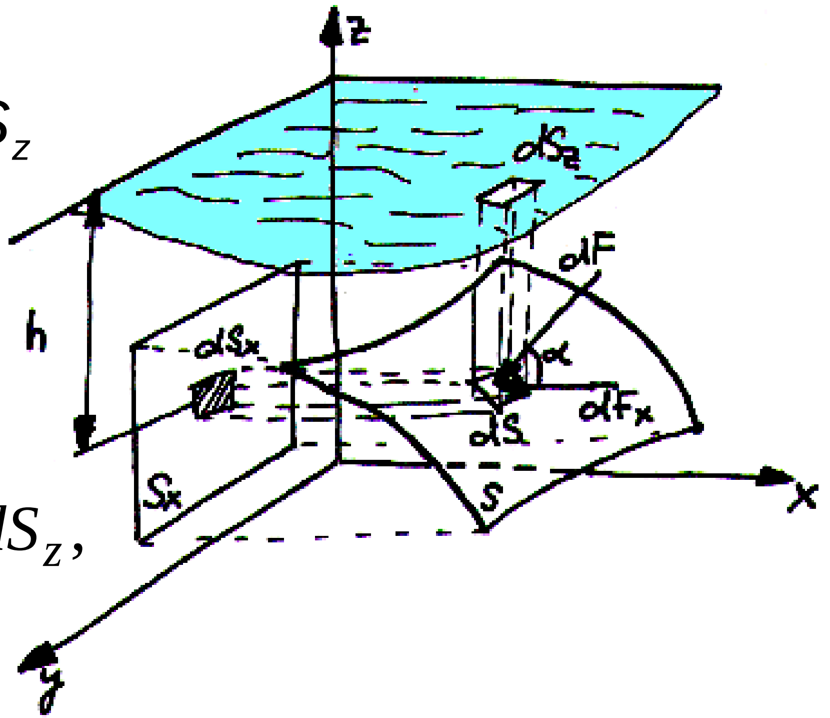
Síla na křivou plochu-složková metoda

Na zvolený plošný prvek dS působí tlaková síla $dF = \rho g h dS$ kolmo na dS

Velikost síly počítáme po složkách.

$$dF_x = p \cdot dS_x,\ dF_y = p \cdot dS_y,\ dF_z = p \cdot dS_z$$

kde dS_x, dS_y, dS_z jsou průměty plochy dS ve směru x,y,z.



Celkové složky síly získáme integrací:

$$F_x = \int_{S_x} p \cdot dS_x,\ F_y = \int_{S_y} p \cdot dS_y,\ F_z = \int_{S_z} p \cdot dS_z,$$

Velikost výsledné síly pak je

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

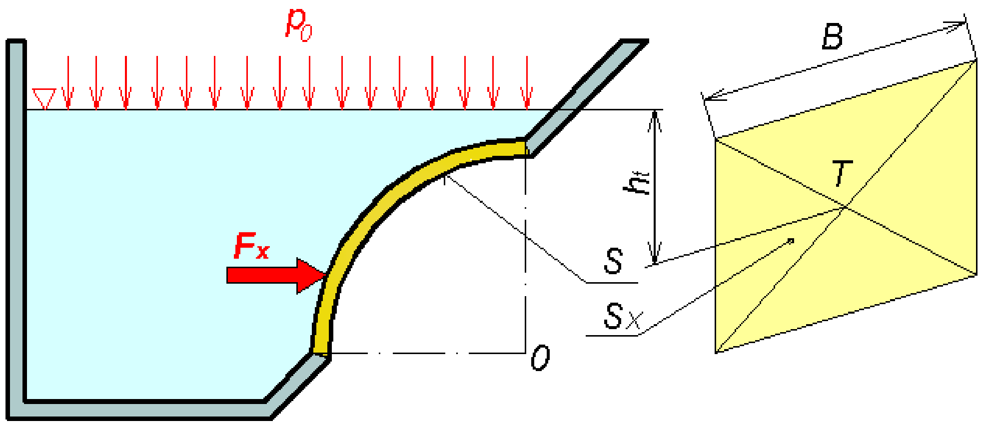
případně pro rovinnou úlohu

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

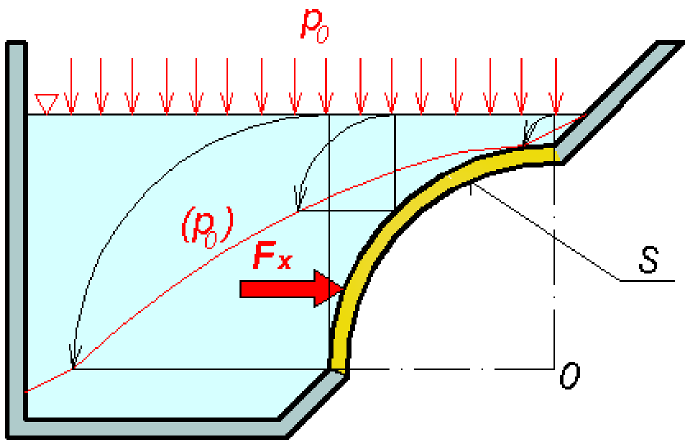
Vodorovná složka F_x tlakové síly je určena rovnicí

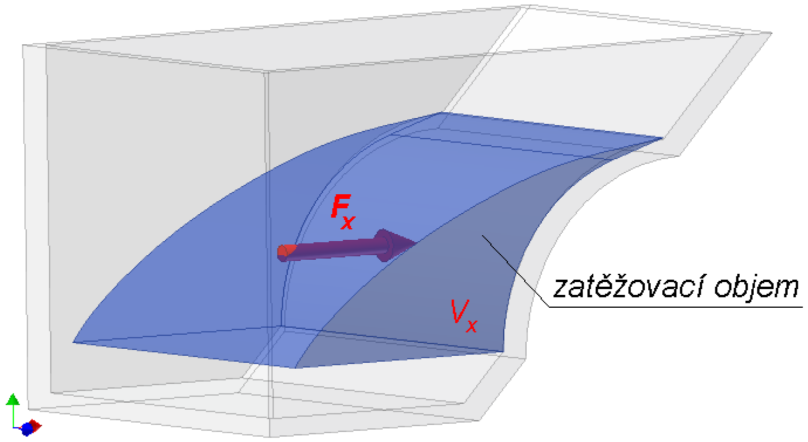
$$F_x = \int \rho g h dS_x = \rho g \int dV_x = \rho g V_x = \rho g h_t S_x$$



S_x je plocha průmětu křivé plochy do svislé roviny.

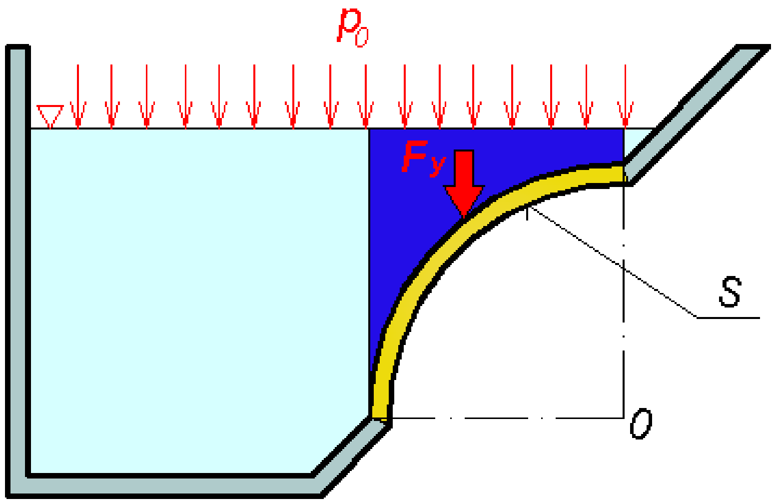
Vodorovná složka na křivou plochu se rovná tlakové síle na kolmý průmět křivé plochy do svislé roviny

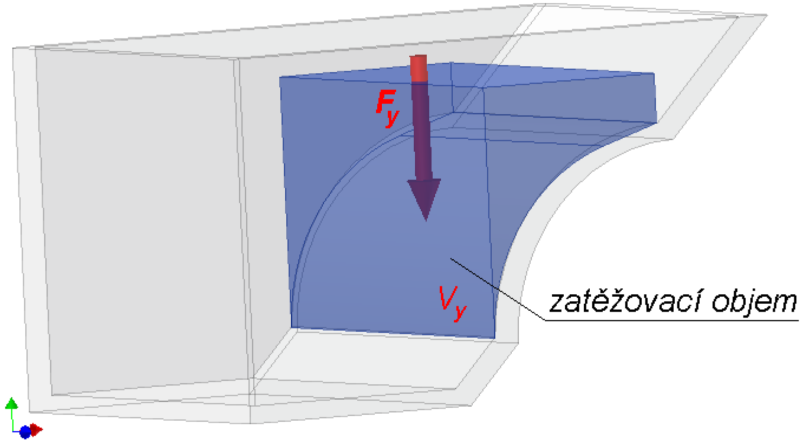




Svislá složka F_y tlaková síly je určena rovnicí

$$F_y = \rho g \int_S h dS_y = \rho g \int_S dV_y = \rho g V_y$$

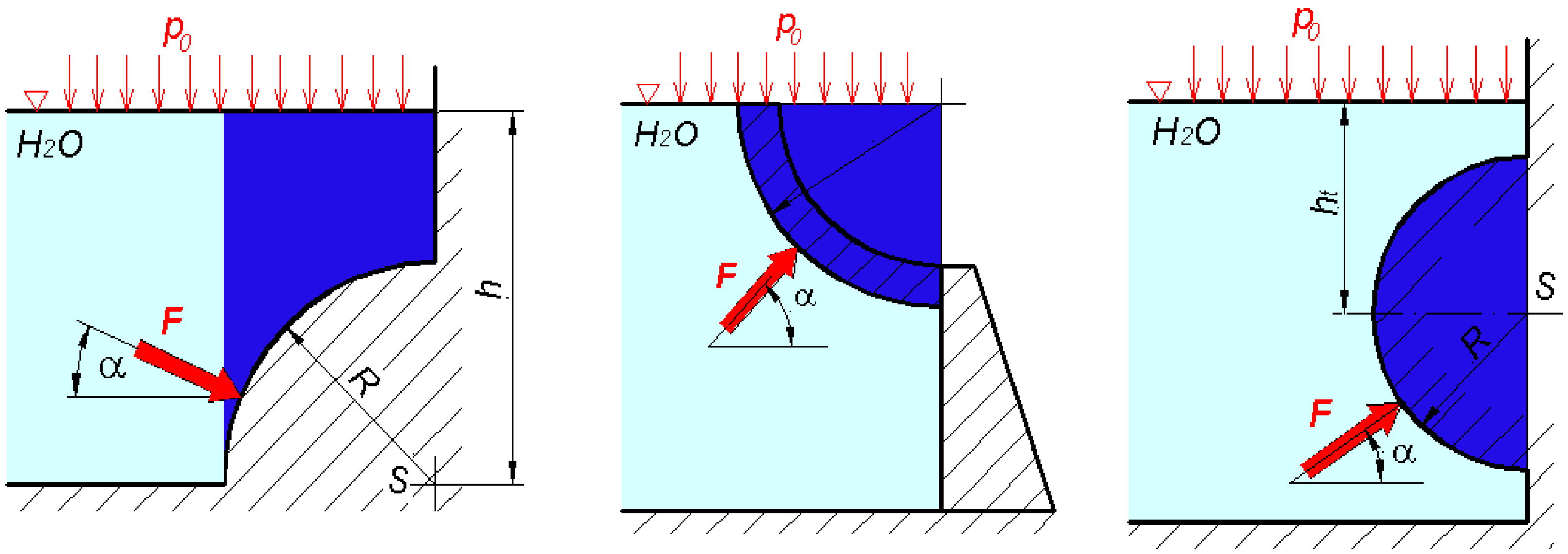




Objem zatěžovacího obrazce V_y je omezen následujícími plochami:

- křivou plochou *S*, na niž se počítá svislá složka tlakové síly
- hladinovou plochou tlaku ovzduší (p_0)
- pláštěm vytvořeným svislými přímkami rovnoběžnými se složkou F_y nad obrysem křivé plochy S.

Obecně však na křivé plochy může působit i síla vztlaková, pak musí platit Archimédův zákon a objem určíme jako objem kapaliny tělesem vytlačené



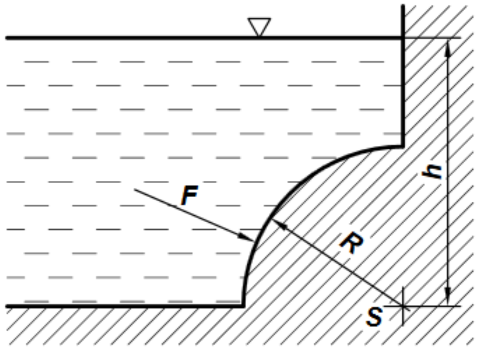
Směr výslednice tlakových sil je dán vztahem

$$tg\alpha = \frac{F_y}{F_x}$$

Příklad 4.3.3

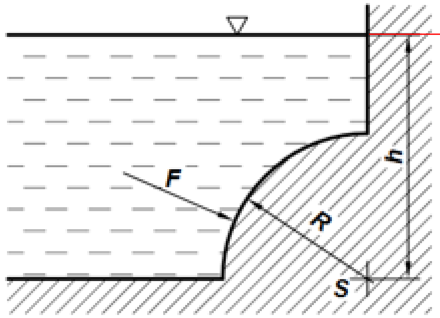
Stanovte velikost tlakové síly F na válcovou plochu u dna nádrže o šířce B. Určete vodorovnou složku tlakové síly F_x přímým výpočtem a svislou složku tlakové síly F_y.

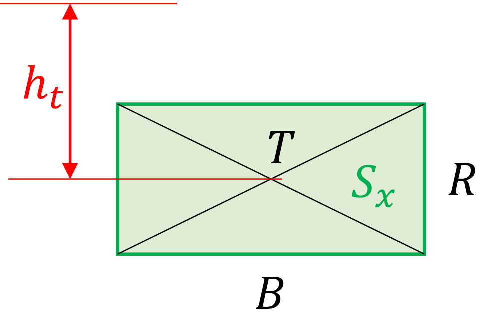
Zadáno:		
h =	1.2 m	
R =	0.8 m	
B =	4.0 m	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
F_x = ?	N	25 113.60
F_y = ?	N	17 946.24
F = ?	N	30 866.82



Vodorovná složka tlakové síly

$$F_x = \rho \cdot g \cdot h_t \cdot S_x$$





$$h_t = h - \frac{R}{2}$$

$$S_x = B \cdot R$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

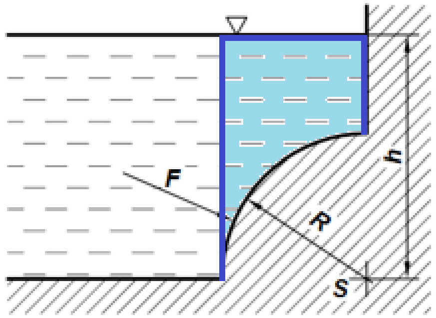
$$tg\alpha = \frac{F_y}{F_x} \rightarrow \alpha$$

Svislá složka tlakové síly

$$F_y = \rho \cdot g \cdot V_y$$

$$V_y = objem\ hranolu\ - objem\ čtvrtiny\ válce$$

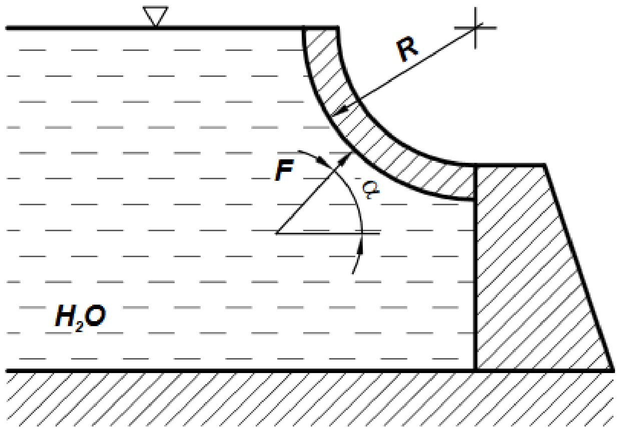
$$V_y = R \cdot h \cdot B - \pi \cdot R^2 \cdot B \cdot \frac{1}{4}$$



Příklad 4.3.1

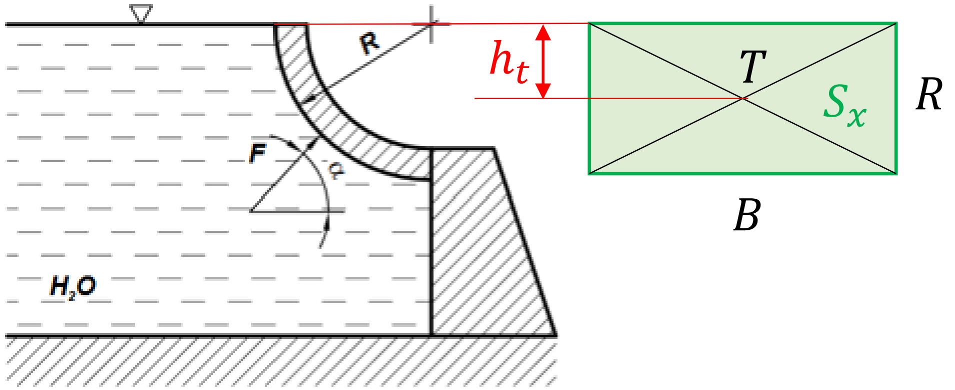
Stanovte tlakovou sílu F na válcový segmentový uzávěr o poloměru R a šířce B. Určete sklon tlakové síly, tj. úhel α. Určete vodorovnou složku F_x a svislou složku F_y tlakové síly F.

Zadáno:		
R =	0.8 m	
B =	3 m	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
F_x = ?	N	9 417.60
F_y = ?	N	14 793.12
F = ?	N	17 536.46
α = ?	deg	57.5184



Vodorovná složka tlakové síly

$$F_x = \rho \cdot g \cdot h_t \cdot S_x$$



$$h_t = \frac{R}{2} \qquad S_x = B \cdot R$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

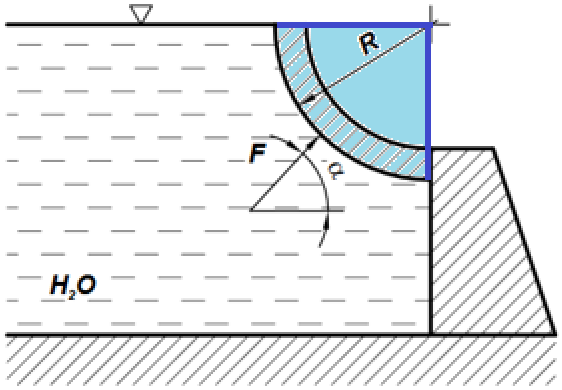
$$tg\alpha = \frac{F_y}{F_x} \rightarrow \alpha$$

Svislá složka tlakové síly

$$F_y = \rho \cdot g \cdot V_y$$

$$V_y = objem\ čtvrtiny\ válce$$

$$V_y = \pi \cdot R^2 \cdot B \cdot \frac{1}{4}$$



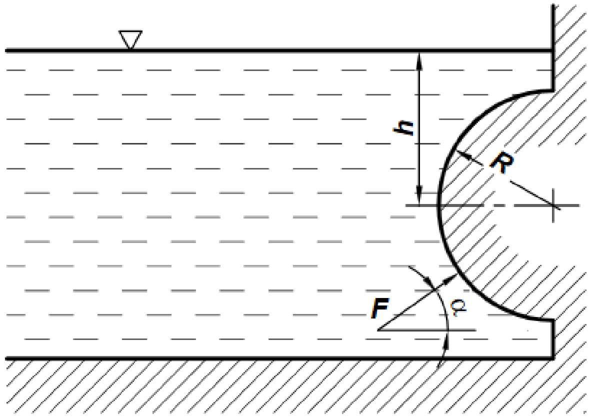
VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Příklad 4.3.5

Stanovte velikost síly F na plochu tvaru polokoule a úhel α, který svírá s vodorovnou rovinou.

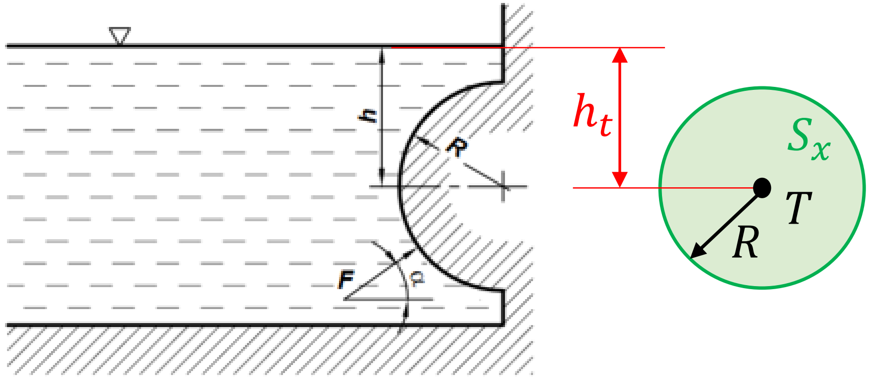
Určete vodorovnou složku tlakové síly F_x.

Zadáno:		
h =	6.5 m	
R =	4 m	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
F_x = ?	N	3 205 175.78
F_y = ?	N	1 314 943.91
F = ?	N	3 464 423.37
α = ?	deg	22.31



Vodorovná složka tlakové síly

$$F_x = \rho \cdot g \cdot h_t \cdot S_x$$



$$h_t = h \qquad S_x = \pi \cdot R^2$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

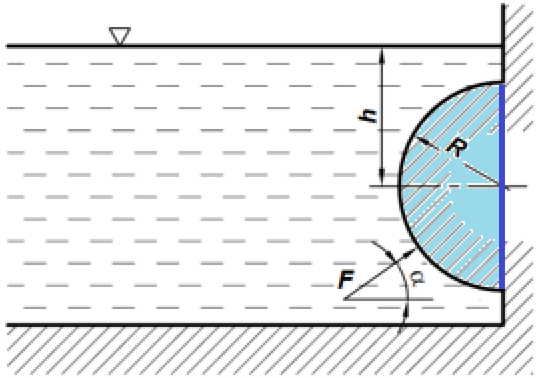
$$tg\alpha = \frac{F_y}{F_x} \rightarrow \alpha$$

Svislá složka tlakové síly

$$F_y = \rho \cdot g \cdot V_y$$

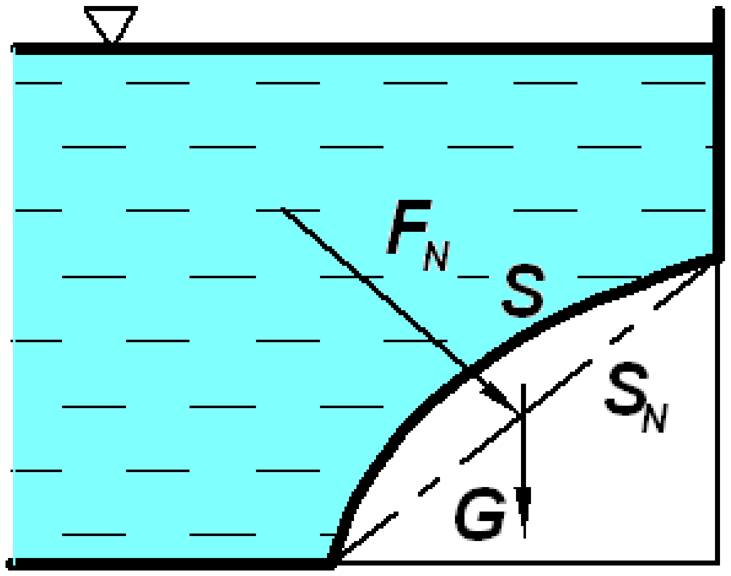
$$V_y = objem\ poloviny\ koule$$

$$V_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

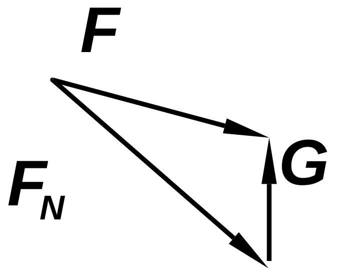


Síla na křivou plochu- metoda náhradních ploch

- křivá plocha se nahradí rovinnou plochou (nebo více rovinnými plochami) tak, aby křivá plocha a náhradní plocha uzavíraly objem. Tíha kapaliny v tomto objemu je G.
- vypočte se tlaková síla na náhradní plochu (případně se určí vektorovým součtem vypočtených tlakových sil na všechny náhradní plochy)
- tíha kapaliny se vektorově odečte nebo přičte, jestliže náhradní plochou se objem přidal nebo odečetl od celkového objemu tekutiny v nádobě.



$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_n - \mathbf{G}$$

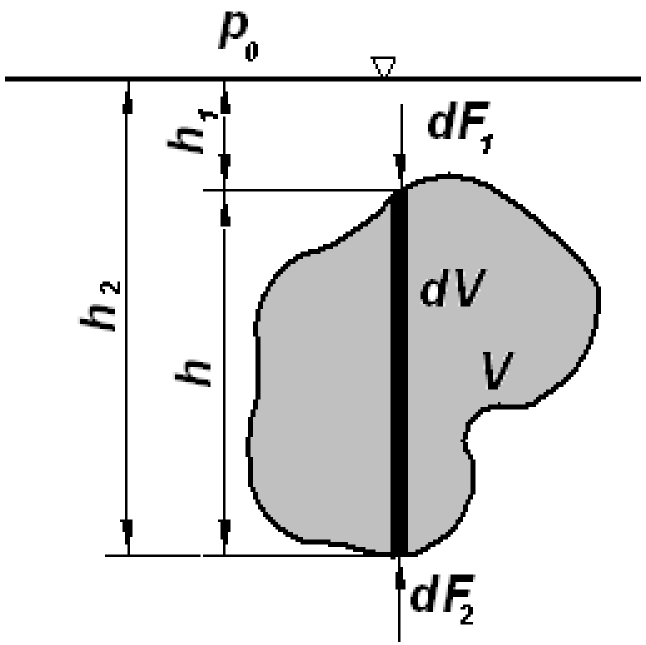


$$F = \sqrt{F_N^2 + G^2 - 2F_N G\cos\alpha}$$

Vztlak a plavání těles

Archimédův zákon

Na těleso ponořené do kapaliny působí obecně síly ve třech na sobě kolmých směrech, tj. ve svislém směru a ve dvou směrech vodorovných na sebe kolmých.



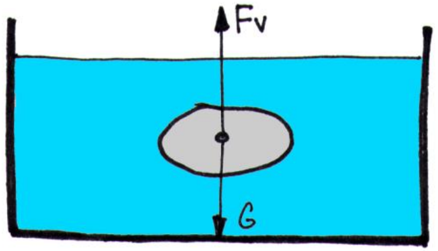
$$dF_1 = \rho g h_1 dS \qquad dF_2 = \rho g h_2 dS$$

$$dF_y = \rho g\, dS\left(h_2 - h_1\right) = \rho g dV$$

$$F_y = F_v = \rho g V = G_k$$

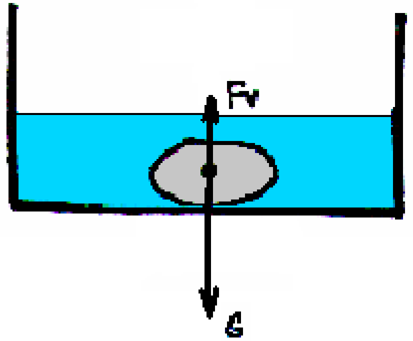
Vztlak a plavání těles

Na těleso ponořené do kapaliny působí dvě síly, a to vztlaková síla F_v v těžišti objemu vytlačené kapaliny, a vlastní tíha tělesa G, působící v těžišti tělesa: $F_v = \rho g V = G_k$, $\qquad G_m = \rho_m g V$

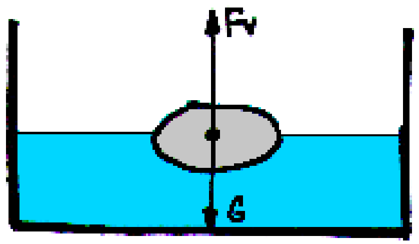


Mohou nastat obecně tři případy:

- $G_m = F_v$ …tíha tělesa je v rovnováze se vztlakovou silou, výslednice je nulová a těleso setrvává v libovolné poloze – vznáší se v kapalině



- $G > Fv$ … tíha tělesa je větší než vztlaková síla, takže výslednice působí ve směru svislém dolů a těleso klesá ke dnu.

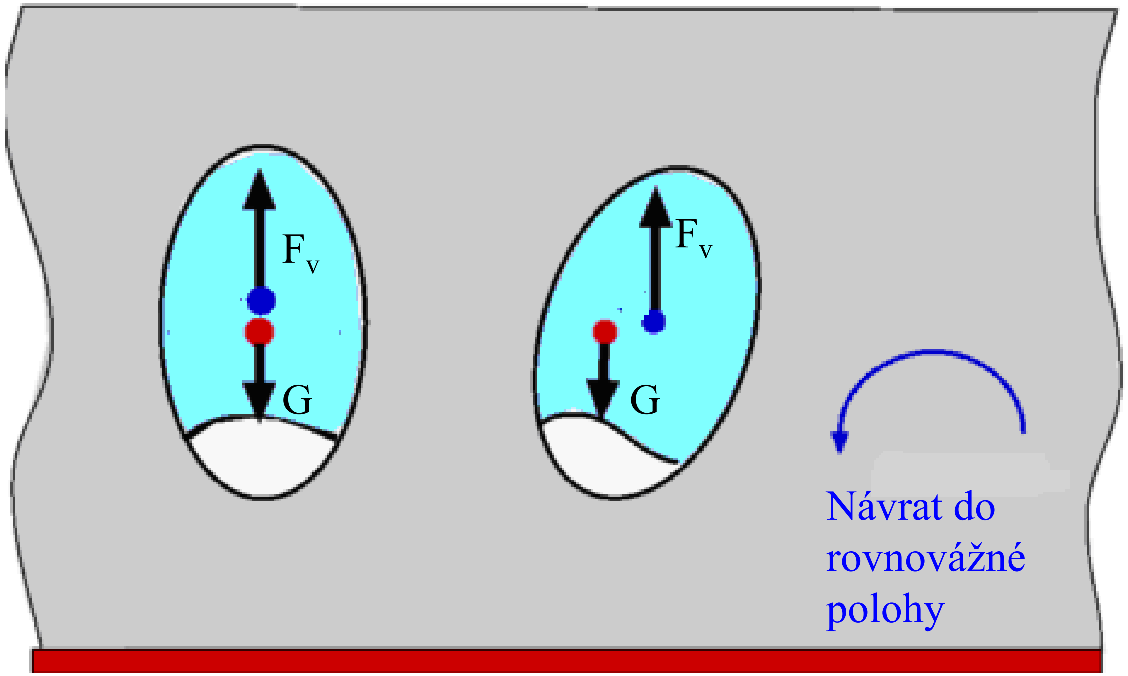


- $G < Fv$ …vlastní tíha tělesa je menší než vztlaková síla, takže výslednice působí svisle nahoru a těleso vznáší k hladině. Vynořením tělesa se zmenší vztlaková síla až nastane rovnováha s vlastní tíhou tělesa, které plave.

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Stabilita ponořeného tělesa

Po vychýlení z rovnováhy se těleso navrátí do rovnovážně polohy pouze tehdy, leží-li působiště vztlakové síly nad působištěm síly tíhové.



Kapalina v relativním klidu

Pohyb přímočarý, rovnoměrně zrychlený/zpomalený, ve vodorovném směru

Pohyb přímočarý rovnoměrně zrychlený/zpomalený ve svislém směru

Válcová nádoba rotující kolem svislé osy

Při pohybu nádoby s kapalinou mohou nastat případy, kdy kapalina je vůči stěnám nádoby v klidu. Na kapalinu působí další hmotnostní síly, které je nutno zahrnout do podmínek hydrostatické rovnováhy:

Eulerova rovnice hydrostatiky

$$\boxed{\vec{a} - \frac{1}{\rho} grad(p) = 0}$$

Jejich účinek se projeví změnou tlakové hladiny p=konst a rozložením tlaků v nádobě.

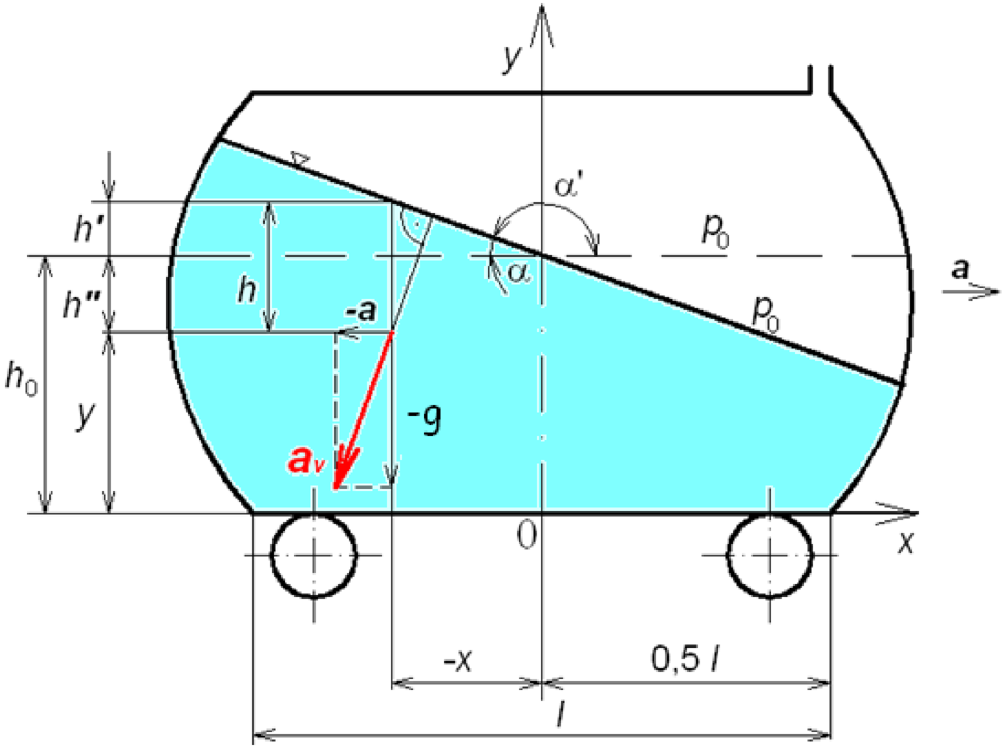
Dosazením zrychlení vnějších objemových sil do diferenciální rovnice tlakové hladiny $a_x dx + a_y dy + a_z dz = 0$ určíme její tvar.

Tlak určíme integrací diferenciální rovnice tlakové funkce

$$dp = \rho\left(a_x dx + a_y dy + a_z dz\right)$$

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Pohyb přímočarý, rovnoměrně zrychlený/zpomalený ve vodorovném směru



Na každou částečku kapaliny v nádobě působí ve svislém směru tíhové zrychlení a ve vodorovném směru zrychlení setrvačné síly.

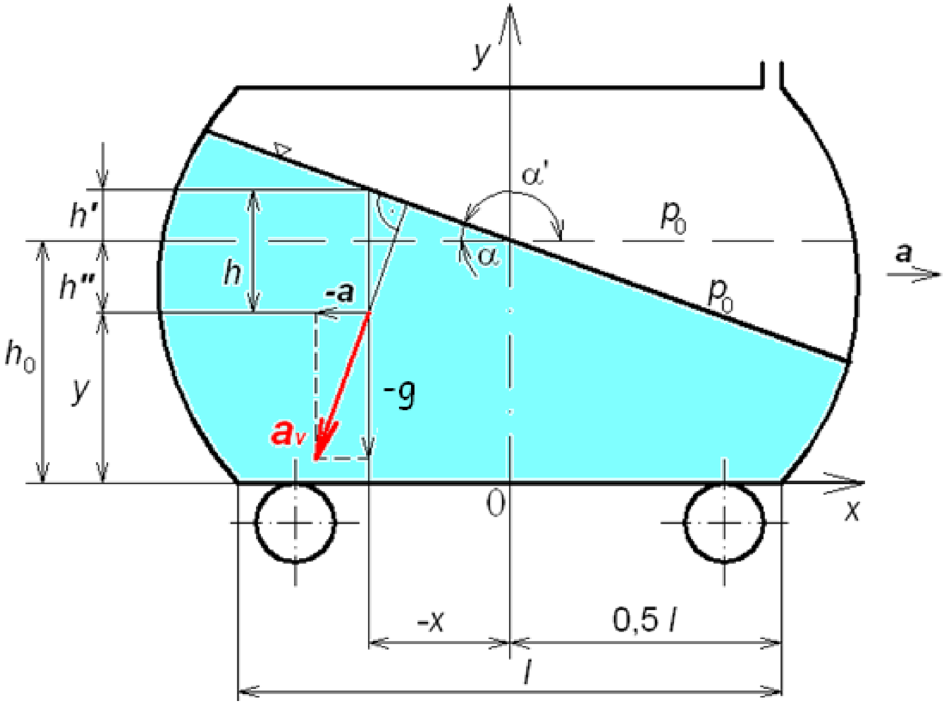
$$\vec{a}_r = (-a \quad ; \quad -g \quad ; \quad 0)$$

Tvar hladiny odvodíme dosazením do diferenciální rovnice hladinové plochy

$$-adx - gdy = 0$$ a po integraci $$ax + gy = konst$$

$$y = konst - \frac{a}{g}x = konst - x\,tg\alpha \Rightarrow$$ rovnice nakloněné roviny

Pohyb přímočarý, rovnoměrně zrychlený/zpomalený ve vodorovném směru



Tlak kapaliny v libovolném místě se vypočte po dosazení dříve uvedených podmínek a do diferenciální rovnice tlakové funkce

$$dp = \rho(-a\,dx - g\,dy)$$

a po integraci

$$p = \rho(-ax - gy) + konst$$

Z okrajové podmínky: pro x = 0 je y = h_0 a relativní tlak v tomto místě je p = 0

$$konst = p + \rho ax + \rho gy = \rho g h_0$$

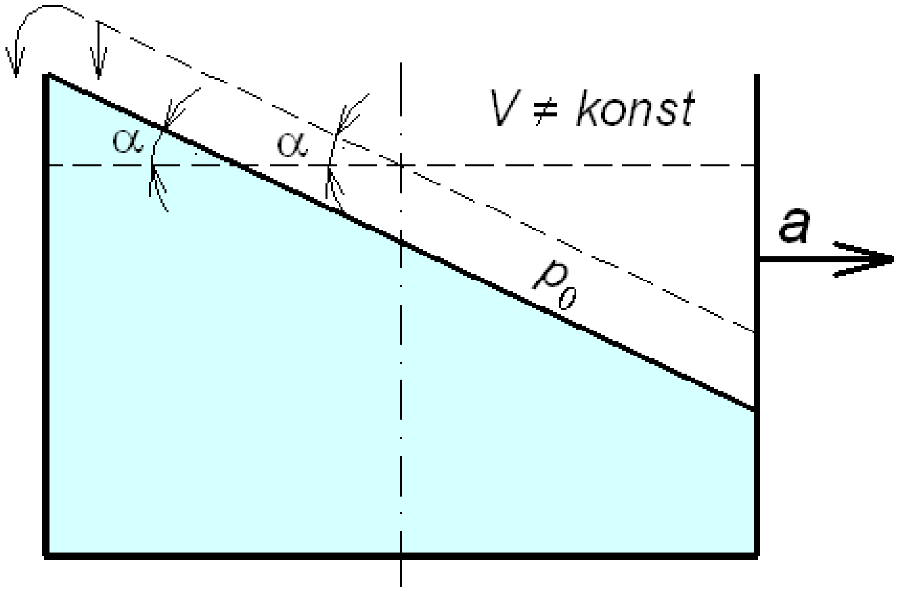
$$p = \rho(-ax - gy) + \rho g h_0 = \rho g\left[h_0 - y - \frac{a}{g}x\right] = \rho g h$$

Výraz je formálně shodný s tlakem v kapalině, na niž působí jen tíže zemská!

V případě, kdy zrychlení je velké, vystoupí rozhraní kapaliny s ovzduším (p_0 = *konst*) nad okraj nádoby a část kapaliny vyteče z nádoby.

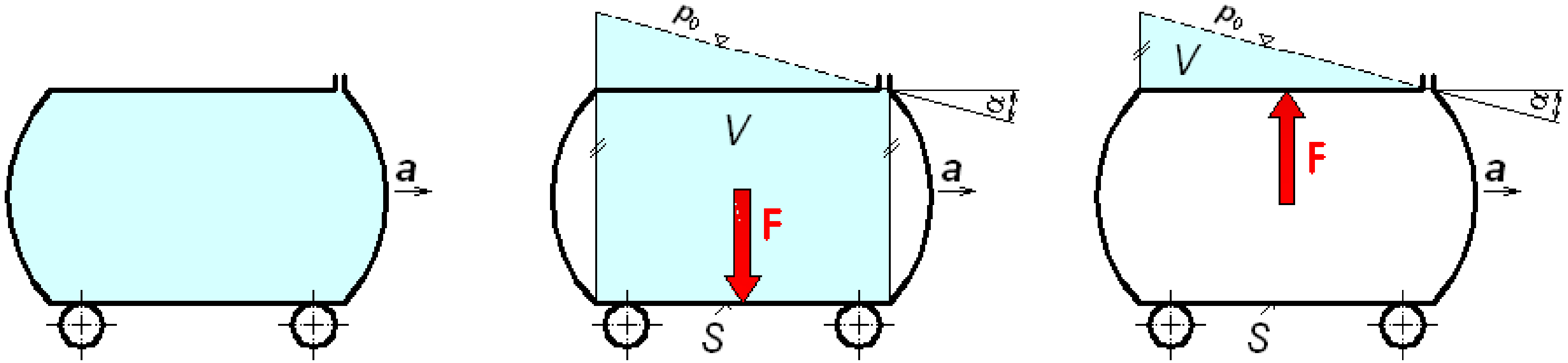
Hladinová plocha tlaku ovzduší prochází tedy v tomto případě místem, přes které kapalina začala vytékat

Vyšetřením hladiny tlaku ovzduší (rozhraní kapaliny a ovzduší) stává se relativní klid kapaliny případem hydrostatickým.



Lze proto použít všechny dříve odvozené poznatky o výpočtu tlaku, tlakové síle na plochy.

Výpočet tlakové síly na dno a víko u uzavřené nádoby zcela naplněné kapalinou



Pro výpočet tlakové síly platí vztah $\boxed{F = \rho g V = \rho g h_t S}$, kde V je objem zatěžovacího obrazce.

Ten je omezen plochou $\boldsymbol{S}$, na níž působí tlaková síla, hladinovou plochou $\boldsymbol{p_o}$ a pláštěm, který vytvoří přímky rovnoběžné s výslednicí tlakové síly $\boldsymbol{F}$ nad obrysem plochy $\boldsymbol{S}$.

Otevřená nádoba

Síla F_1 je vodorovná tlaková síla

$$F_1 = \rho \cdot g \cdot h_{t1} \cdot S_1$$

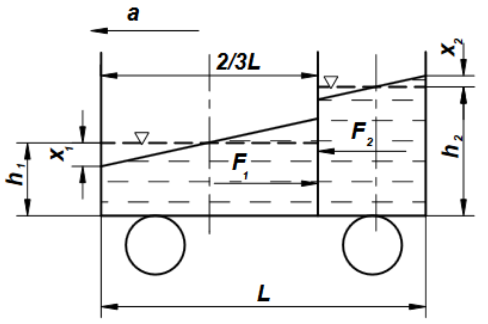
Vzdálenost těžiště plochy S_1 po nakloněnou hladinu

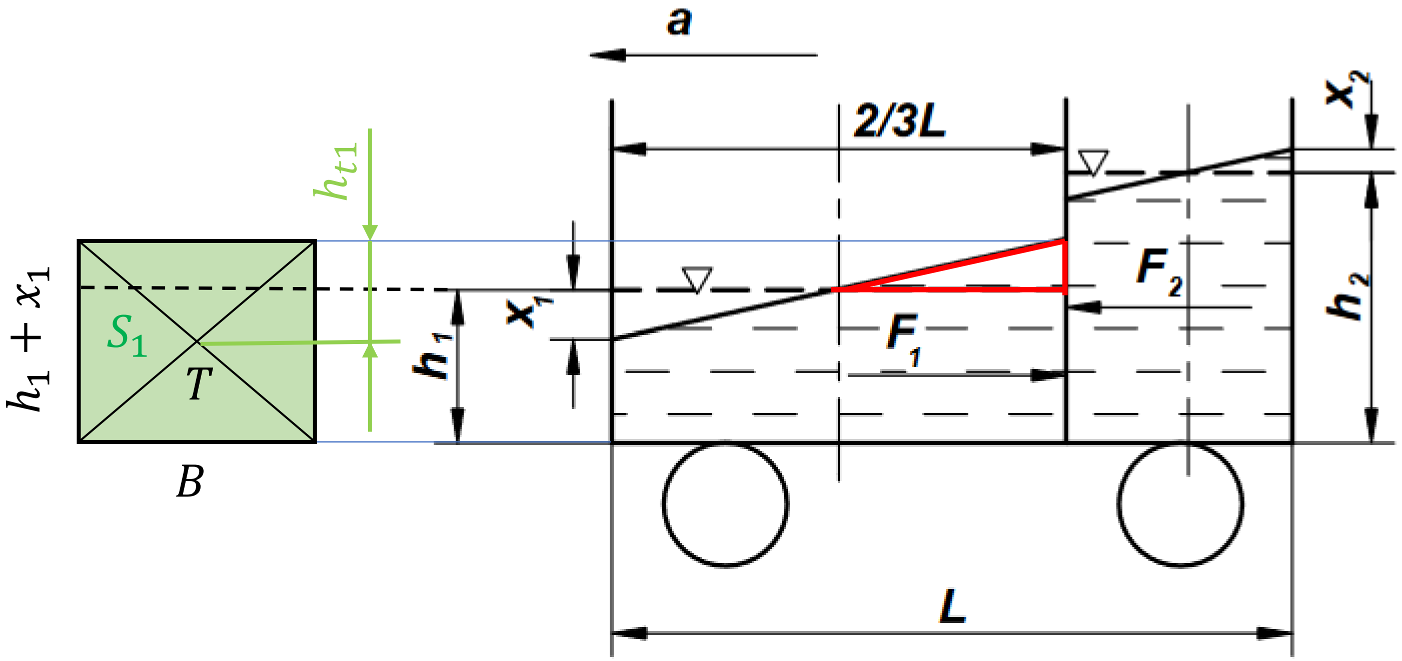
$$h_{t1} = \frac{h_1 + x_1}{2}$$

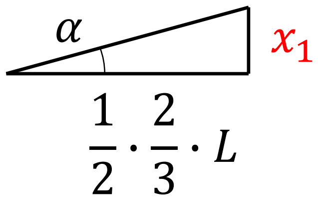
Příklad 5.1.1

Vozík ve tvaru hranolu se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením a. Jeho objem je rozdělen přepážkou na dvě části, v nichž je voda ve výši h_1, h_2. Šířka vozíku je B. Určete výslednou tlakovou sílu F na přepážku.

Zadáno:		
L =	3 m	
h_1 =	1 m	
h_2 =	1.75 m	
B =	1 m	
a =	3.924 m.s^{-1}	
ρ =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
F_1 = ?	N	9 613.80
F_2 = ?	N	11 784.26
F = ?	N	2 170.46
x_1 = ?	m	0.40
x_2 = ?	m	0.20







Platí vztah odvozený výše

$$tg\alpha = \frac{a}{g}$$

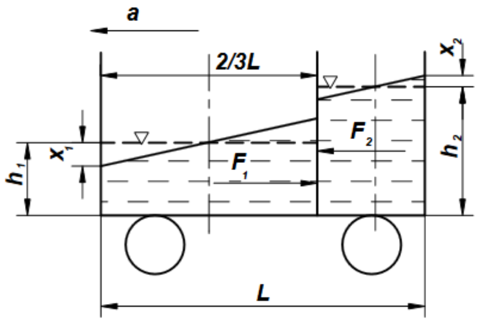
Z vyznačeného pravoúhlého trojúhelníku můžeme vypočítat výšku posunutí hladiny x_1

$$tg\alpha = \frac{a}{g} = \frac{x_1}{\frac{1}{3}L} \rightarrow x_1 = \frac{a}{g} \cdot \frac{1}{3}L$$

Příklad 5.1.1

Vozík ve tvaru hranolu se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením a. Jeho objem je rozdělen přepážkou na dvě části, v nichž je voda ve výši h_1, h_2. Šířka vozíku je B. Určete výslednou tlakovou sílu F na přepážku.

Zadáno:		
$L =$	3 m	
$h_1 =$	1 m	
$h_2 =$	1.75 m	
$B =$	1 m	
$a =$	3.924 m.s^{-1}	
$\rho =$	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
$F_1 = ?$	N	9 613.80
$F_2 = ?$	N	11 784.26
$F = ?$	N	2 170.46
$x_1 = ?$	m	0.40
$x_2 = ?$	m	0.20



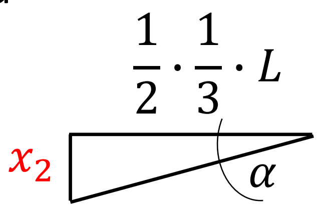
Otevřená nádoba

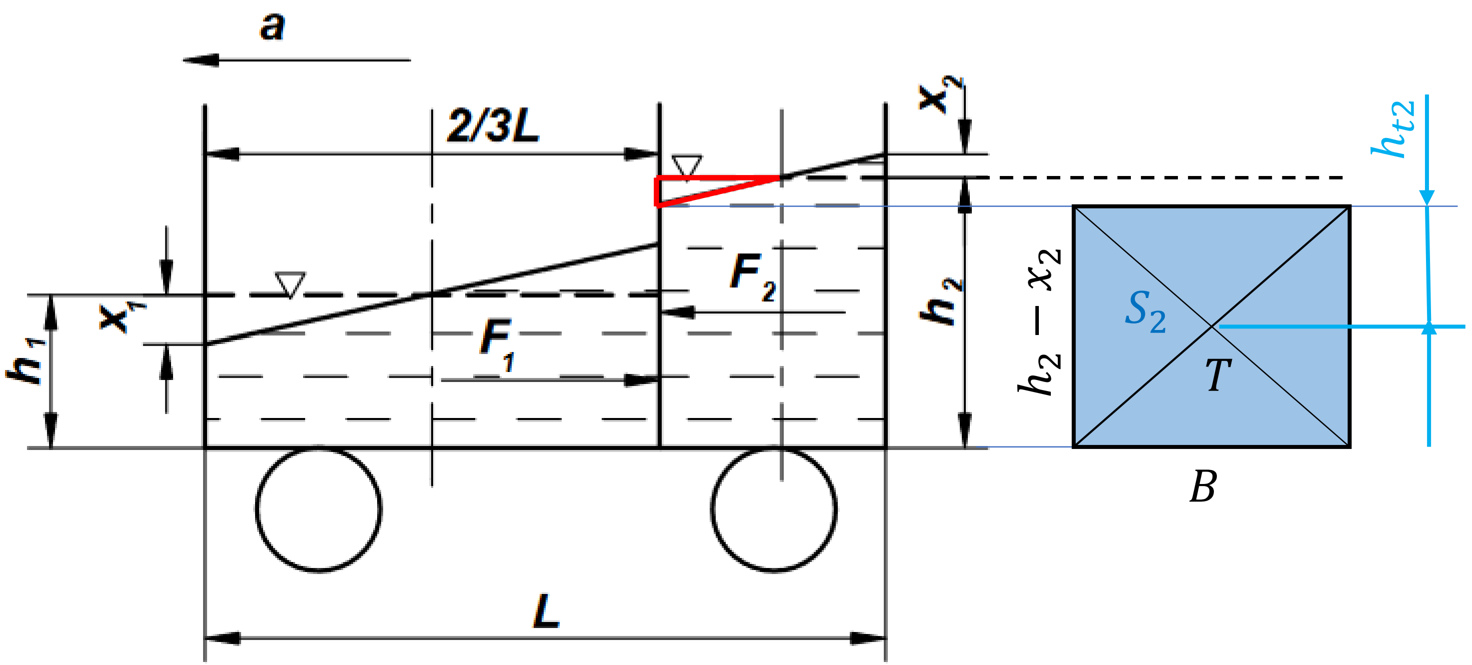
Síla F_2 je také vodorovná tlaková síla

$$F_1 = \rho \cdot g \cdot h_{t2} \cdot S_2$$

Vzdálenost těžiště plochy S_2 po nakloněnou hladinu

$$h_{t2} = \frac{h_2 + x_2}{2}$$





Z vyznačeného pravoúhlého trojúhelníku můžeme vypočítat výšku posunutí hladiny x_2

$$tg\alpha = \frac{a}{g} = \frac{x_2}{\frac{1}{6}L} \rightarrow x_2 = \frac{a}{g} \cdot \frac{1}{6} L$$

Výsledná tlaková síla F je rozdíl sil působících od kapaliny zleva a zprava (vždy odečítáme menší sílu od větší)

$$F = F_2 - F_1$$

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Uzavřená nádoba

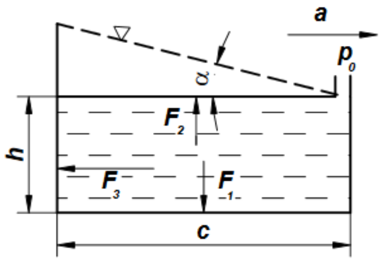
Příklad 5.1.3

Nádrž ve tvaru hranolu s malým zavzdušňovacím otvorem ve víku u přední hrany se na podvozku pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením a. Nádrž byla za klidu zcela zaplněna kapalinou o hustotě ρ. Stanovte za pohybu tlakovou sílu F_1 působící na dno nádrže, sílu F_2 na víko a sílu F_3 na zadní stěnu nádrže.

Zadáno:

a =	4.905 ms^{-2}
b =	0.5 m
c =	1 m
h =	0.5 m
ρ =	720 kgm^{-3}

Vypočtěte:		Výsledky:
F_1 = ?	N	2 648.70
F_2 = ?	N	882.90
F_3 = ?	N	1 324.35



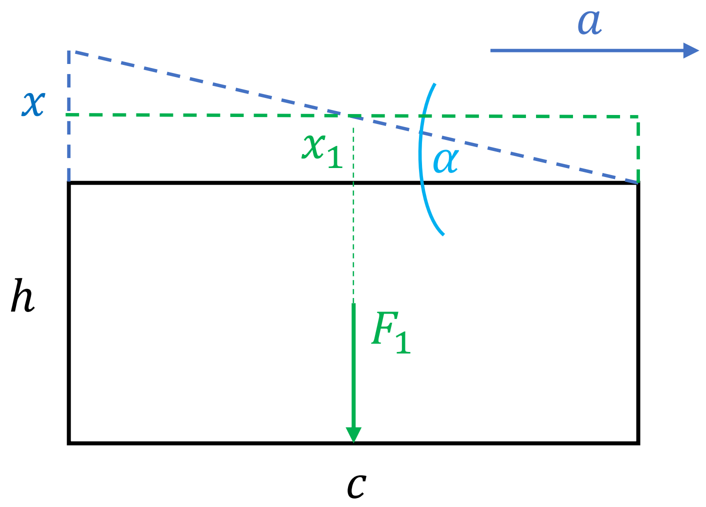
Síla na dno nádoby F_1 je svislá tlaková síla

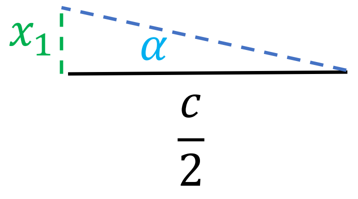
$$F_1 = \rho \cdot g \cdot V_1$$

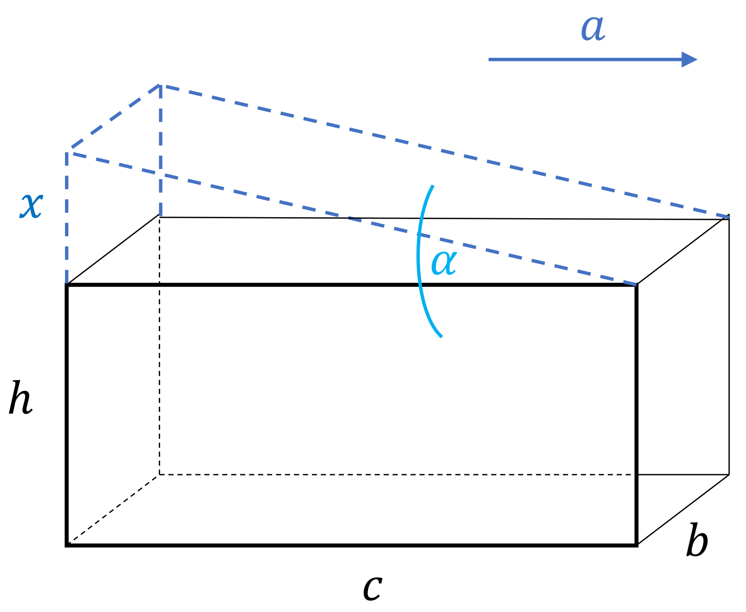
Zatěžovací objem V_1 je objem kapaliny nad působištěm tlakové síly F_1 (objem v nádobě + imaginární objem od pohybu nádoby)

$$V_1 = c \cdot b \cdot (h + x_1)$$

$$tg\alpha = \frac{a}{g} = \frac{x_1}{\frac{c}{2}} \rightarrow x_1 = \frac{a}{g} \cdot \frac{c}{2}$$





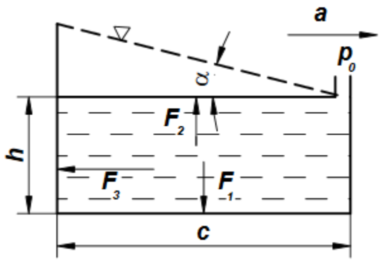


Příklad 5.1.3

Nádrž ve tvaru hranolu s malým zavzdušňovacím otvorem ve víku u přední hrany se na podvozku pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením a. Nádrž byla za klidu zcela zaplněna kapalinou o hustotě ρ. Stanovte za pohybu tlakovou sílu F_1 působící na dno nádrže, sílu F_2 na víko a sílu F_3 na zadní stěnu nádrže.

Zadáno:

a =	4.905 ms^{-2}	
b =	0.5 m	
c =	1 m	
h =	0.5 m	
ρ =	720 kgm^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
F_1 = ?	N	2 648.70
F_2 = ?	N	882.90
F_3 = ?	N	1 324.35



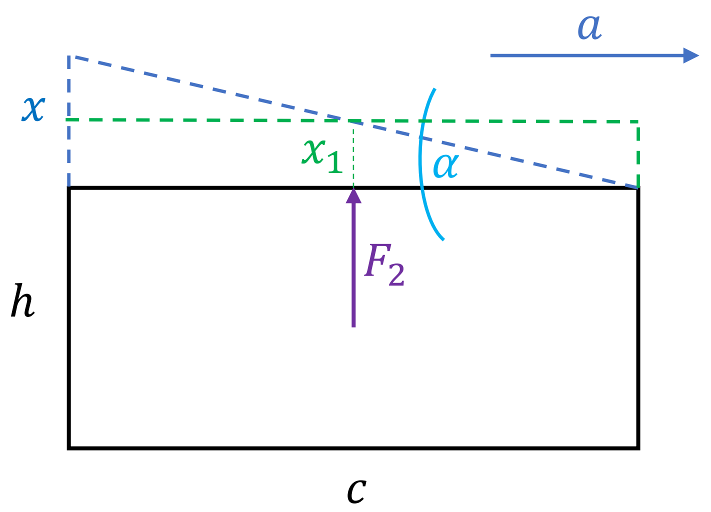
Síla na dno nádoby F_2 je svislá tlaková síla

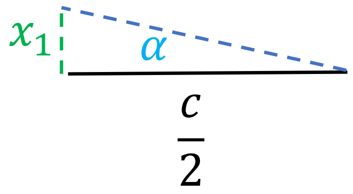
$$F_2 = \rho \cdot g \cdot V_2$$

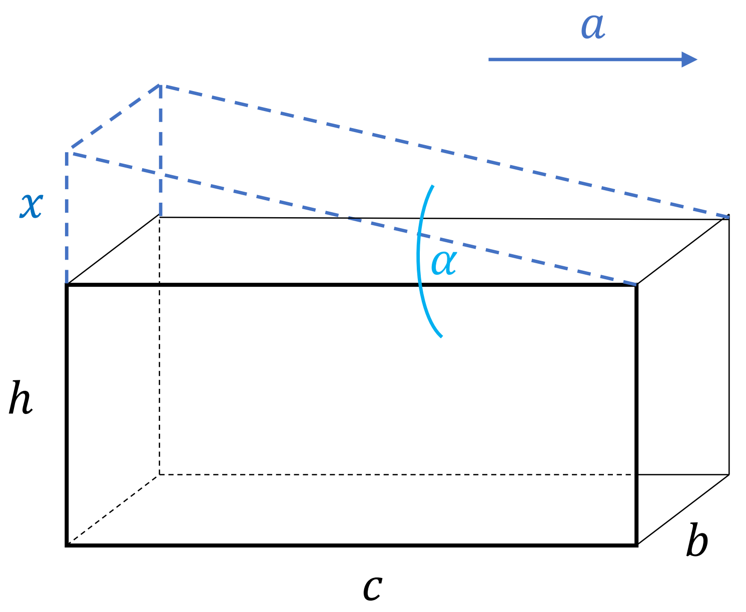
Zatěžovací objem V_2 je objem kapaliny nad působištěm tlakové síly F_2 (imaginární objem od pohybu nádoby)

$$V_2 = c \cdot b \cdot x_1$$

$$tg\alpha = \frac{a}{g} = \frac{x_1}{\frac{c}{2}} \rightarrow x_1 = \frac{a}{g} \cdot \frac{c}{2}$$







Příklad 5.1.3

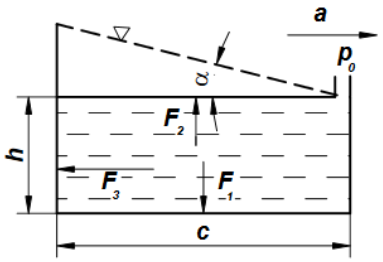
Nádrž ve tvaru hranolu s malým zavzdušňovacím otvorem ve víku u přední hrany se na podvozku pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením a. Nádrž byla za klidu zcela zaplněna kapalinou o hustotě ρ. Stanovte za pohybu tlakovou sílu F_1 působící na dno nádrže, sílu F_2 na víko a sílu F_3 na zadní stěnu nádrže.

Zadáno:

a =	4.905 ms^{-2}	
b =	0.5 m	
c =	1 m	
h =	0.5 m	
ρ =	720 kgm^{-3}	

Vypočtěte:

		Výsledky:
F_1 = ?	N	2 648.70
F_2 = ?	N	882.90
F_3 = ?	N	1 324.35



Síla na zadní (levou) stěnu nádoby F_3 je vodorovná tlaková síla

$$F_3 = \rho \cdot g \cdot h_t \cdot S$$

Plocha S je skutečná plocha (boční stěna nádoby) na kterou působí tlaková síla

$$S = b \cdot h$$

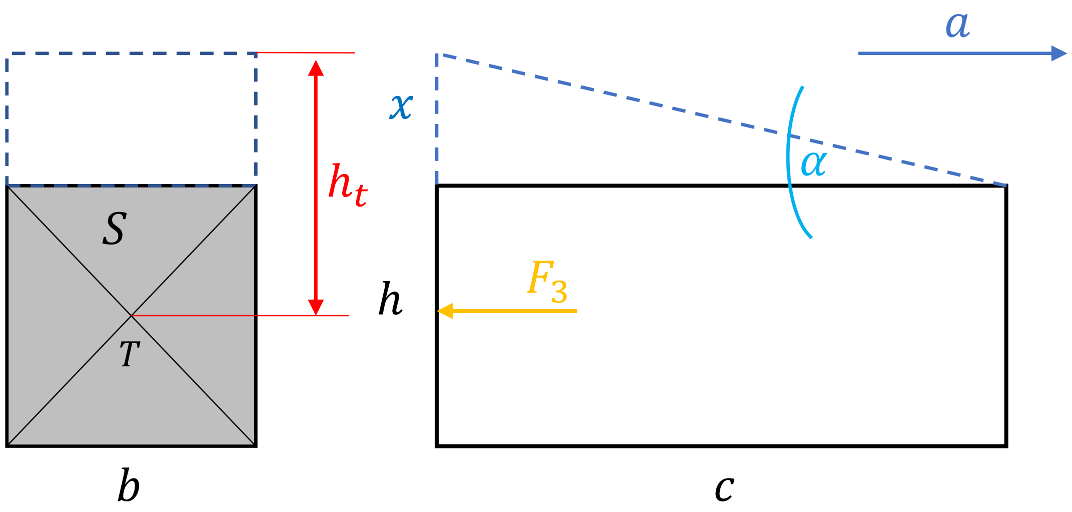
h_t je vzdálenost těžiště plochy S po hladinu (imaginární hladinu)

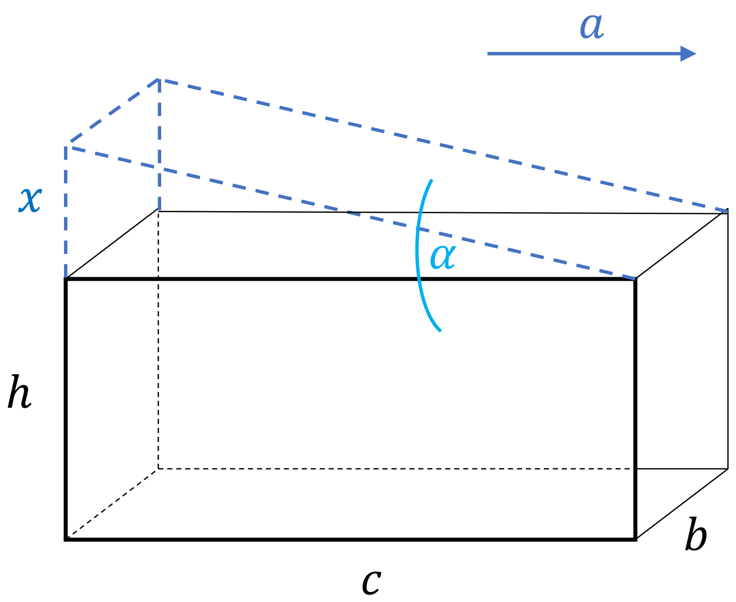
$$h_t = \frac{h}{2} + x$$

$$tg\alpha = \frac{a}{g} = \frac{x}{c} \rightarrow x = \frac{a}{g} \cdot c$$

nebo v tomto případu

$$x = 2 \cdot x_1$$

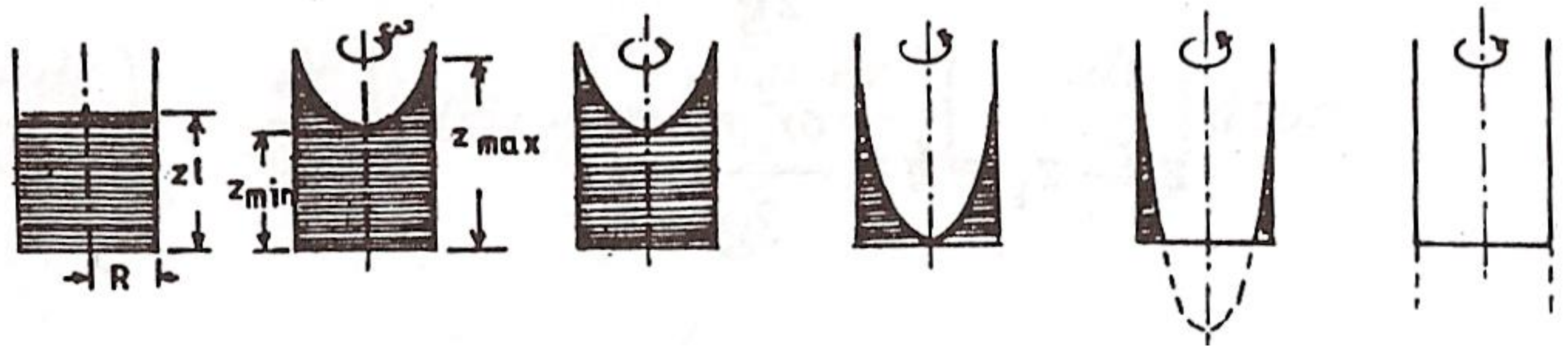




Válcová nádoba rotující kolem svislé osy

Otevřená nádoba

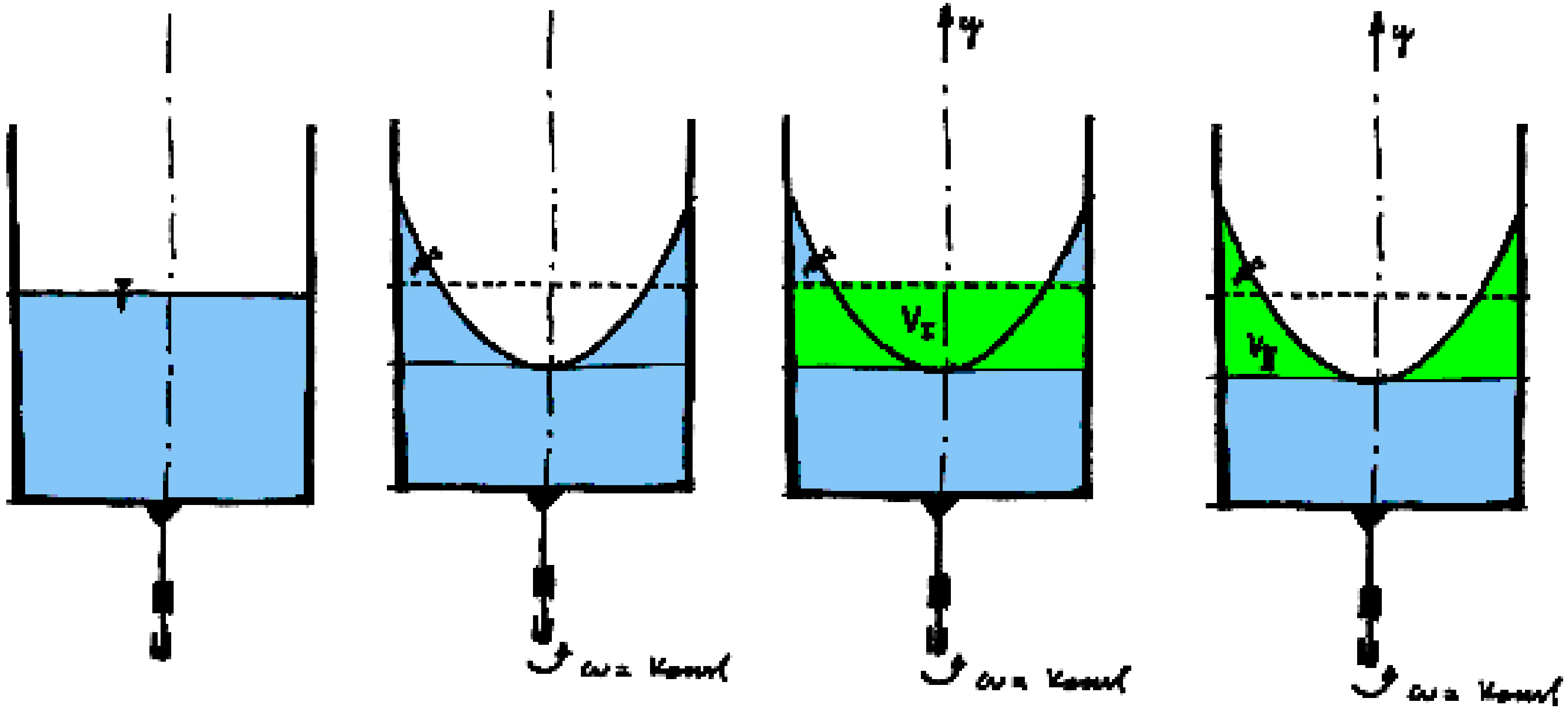
Válcová nádoba naplněná zčásti kapalinou se otáčí rovnoměrně kolem svislé osy.



- na kapalinu působí ve vodorovném směru síla odstředivá, reprezentovaná odstředivým zrychlením $r\omega^2$
- ve svislém směru působí síla tíhová, vyjádřená gravitačním zrychlením $-g$

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

V = konst, z nádoby kapalina nevytéká



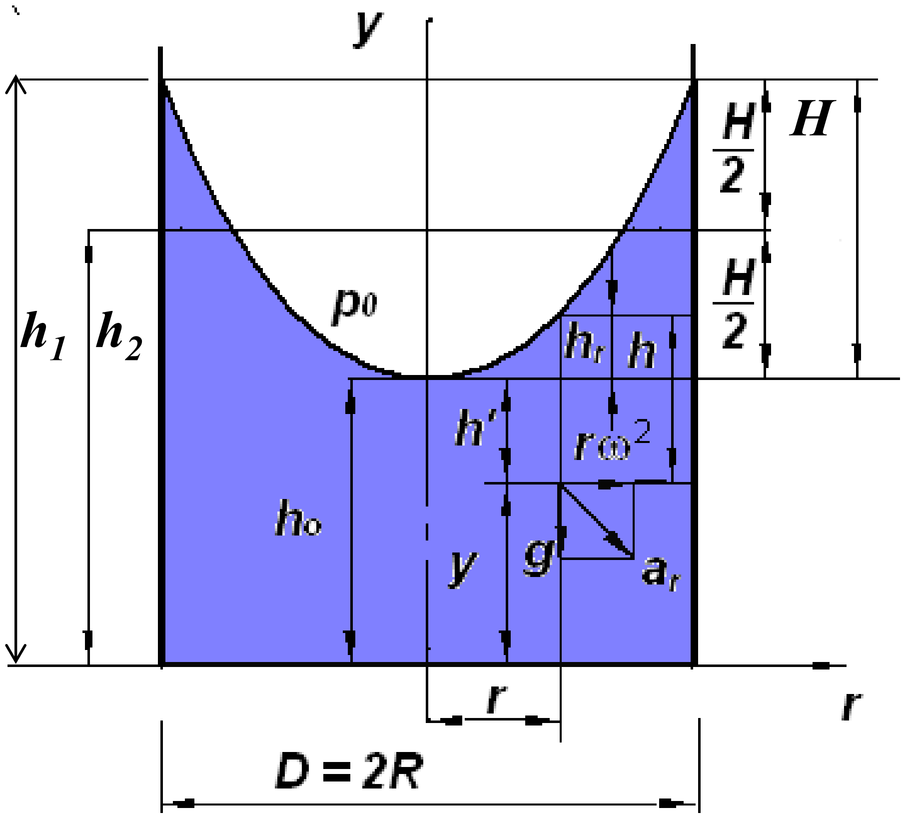
Otevřená válcová nádoba rotující kolem svislé osy

Diferenciální rovnice hladinové plochy : $\vec{a}_r = \left(r\omega^2 \quad ; \quad -g \quad ; \quad 0\right)$

$$r\omega^2 dr - g dy = 0,$$

$$\frac{r^2\omega^2}{2} - gy + konst = 0 \Rightarrow konst = -\frac{r^2\omega^2}{2} + gy \; ; \quad konst = gh_0$$

$$\frac{r^2\omega^2}{2} - g\left(y - h_0\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{parabola}$$



Výška rotačního paraboloidu

$$h_r = y_r - h_0 = \frac{r^2\omega^2}{2g} = \frac{u_r^2}{2g}$$

$$H = y_R - h_0 = \frac{R^2\omega^2}{2g} = \frac{u_R^2}{2g}$$

$$H = \frac{R^2\omega^2}{2g} = 2\left(h_1 - h_2\right)$$

Výpočet tlaku

Diferenciální rovnice tlakové funkce :

$$dp = \rho \cdot \left(r\omega^2 dr - g dy \right) \qquad \vec{a}_r = \left(r\omega^2 \quad ; \quad -g \quad ; \quad 0 \right)$$

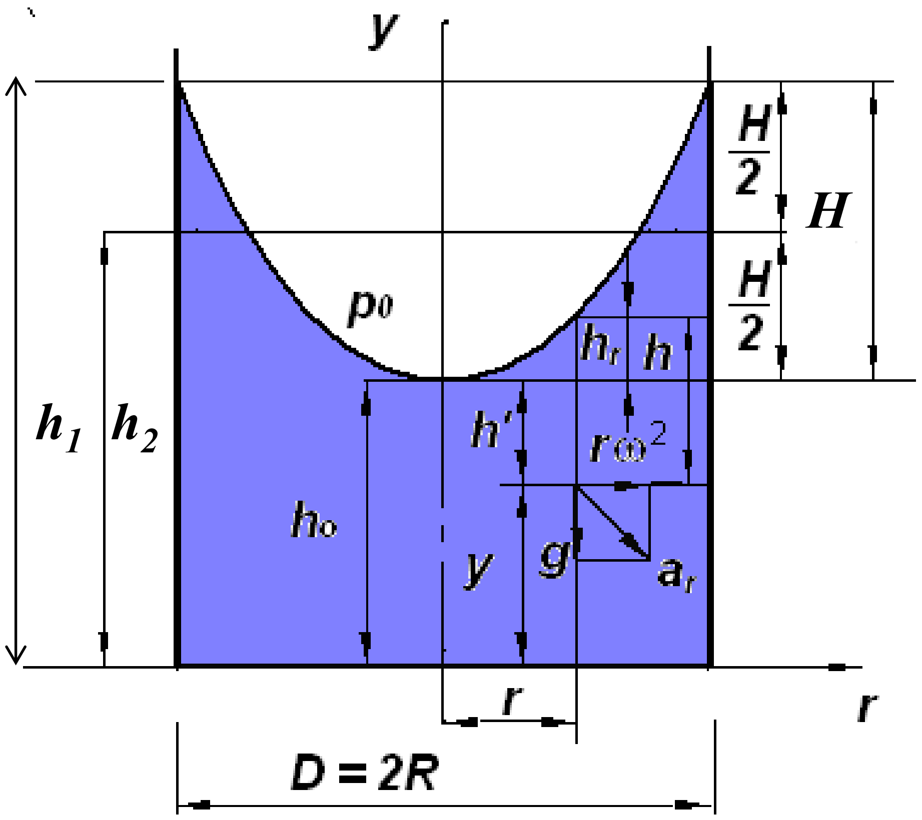
$$p = \rho \cdot \int \left(r\omega^2 dr - g dy \right)$$

$$p = \rho \cdot \frac{r^2 \omega^2}{2} - \rho \cdot g \cdot y + konst,$$

Pro x = 0 je y = h_0 a relativní tlak v tomto místě je p = 0

$$konst = \rho g h_0$$

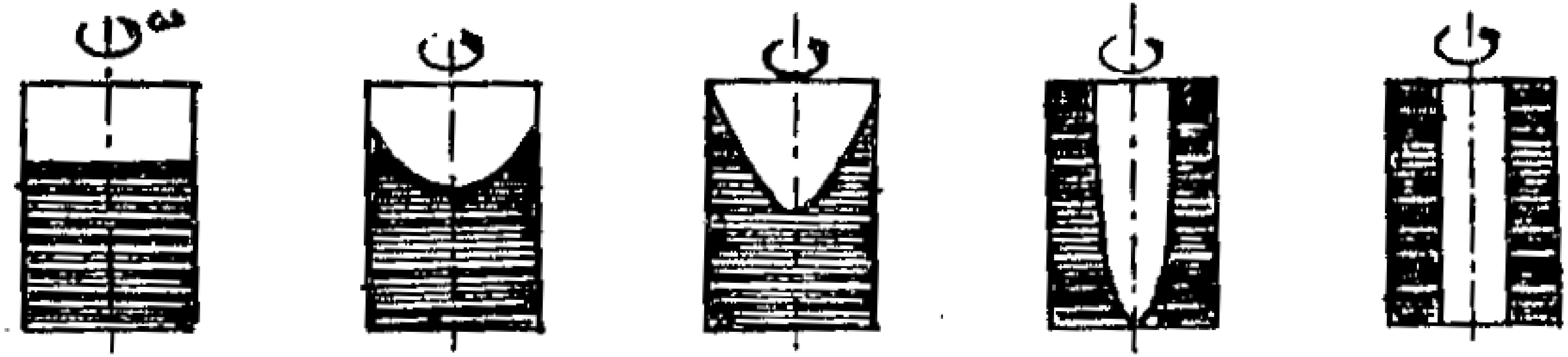
$$p = \rho g \left(h_0 - y + \frac{r^2 \omega^2}{2g} \right) = \rho g h$$



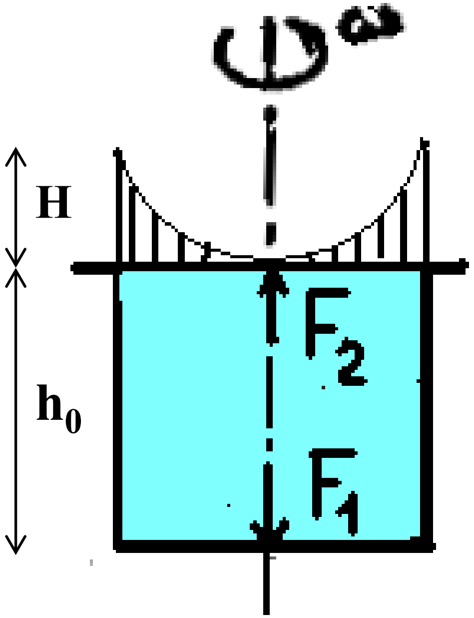
kde h je opět svislá vzdálenost daného místa od hladinové plochy tlaku ovzduší za rotace

- **Uzavřená nádoba**

V= konst, nádoba je zaplněná z části



V= konst, nádoba je zcela zaplněná



$$F_1=\rho g V_{y1}=\rho g\left(\frac{\pi d^2}{4}h_0+\frac{1}{2}\frac{\pi d^2}{4}H\right)$$

$$F_2=\rho g V_{y2}=\rho g\left(\frac{1}{2}\frac{\pi d^2}{4}H\right)$$

Otevřená nádoba

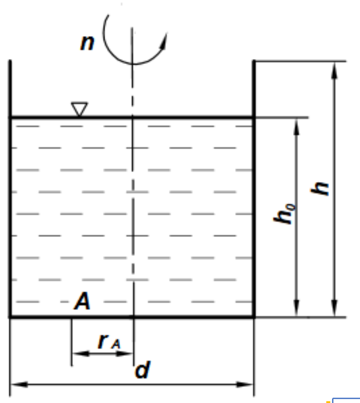
Příklad 5.2.1

Stanovte otáčky nádoby n, při kterých se hladina $p_0 = konst.$ dotkne dna nádoby a nakreslete hladinovou plochu atmosférického tlaku. Vyteče zčásti kapalina z nádoby? Když ano, jaký objem V vyteče? Jaký relativní tlak p_A bude v místě A na poloměru r_A při rotaci nádoby s kapalinou?

Zadáno:

$h_0 =$	0.0667 m
$h =$	0.1 m
$d =$	0.1 m
$r_A =$	0.025 m
$\rho =$	1000 kg.m^{-3}

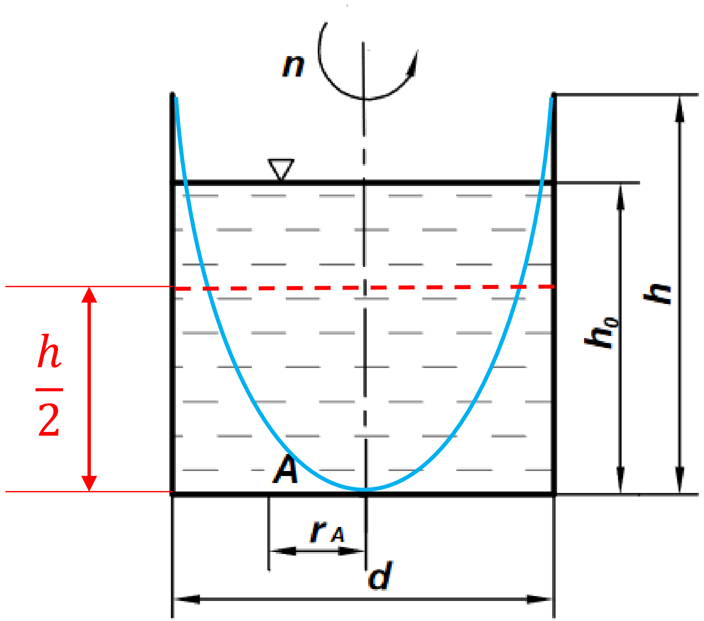
Vypočtěte:		Výsledky:
$H_p = ?$	m	0.10
$n = ?$	s^{-1}	4.459
$p_A = ?$	Pa	245.40
$V = ?$	m^3	0.000131

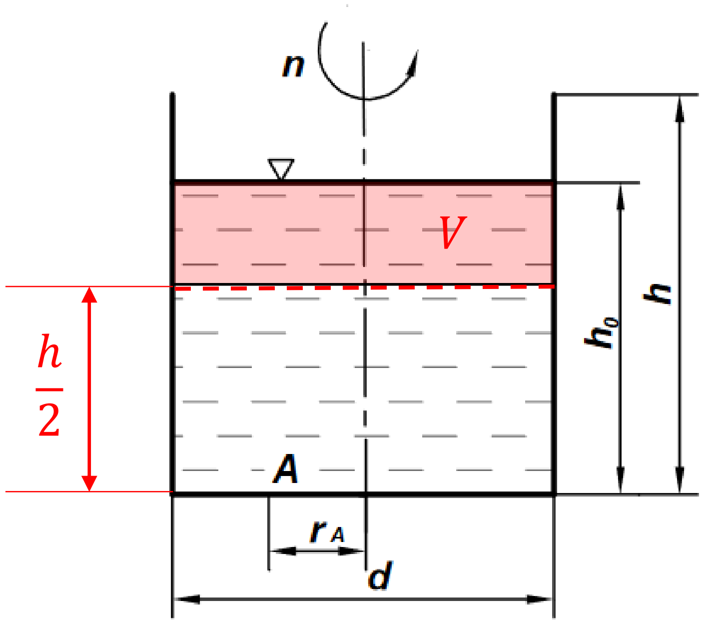


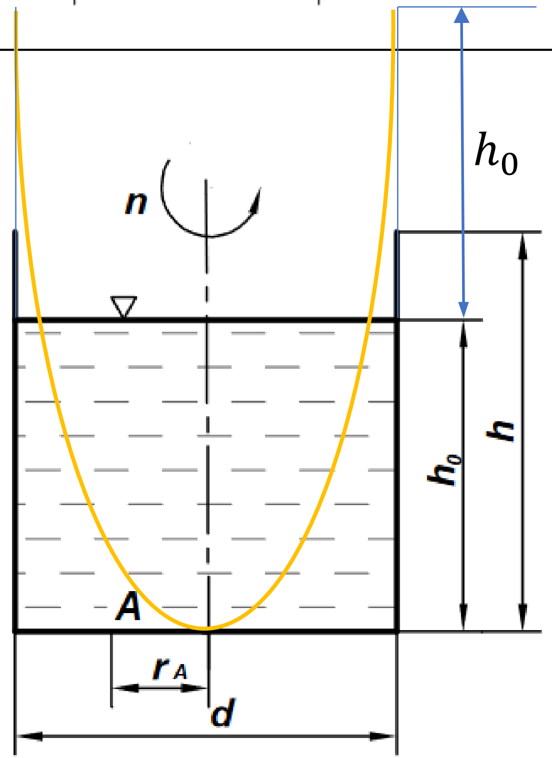
Určení podmínky jestli kapalina vyteče z nádoby: Platí že původní (nebo aktuální) hladina vždy půlí výšku rotačního paraboloidu. V našem případě je podmínka kdy se hladina dotkne dna, to je ve chvíli kdy má paraboloid výšku, která odpovídá výšce nádoby h.

$$h_0 \leq \frac{h}{2} \rightarrow kapalina\ nevyteče$$

$$h_0 > \frac{h}{2} \rightarrow kapalina\ vyteče$$







Objem kapaliny, který vyteče z nádoby - je původní objem kapaliny mínus objem poloviny nádoby:

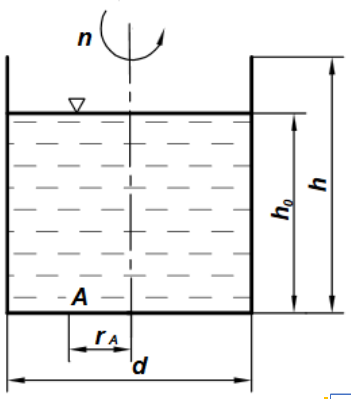
$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h_0 - \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{\mathrm{h}}{2}$$

Příklad 5.2.1

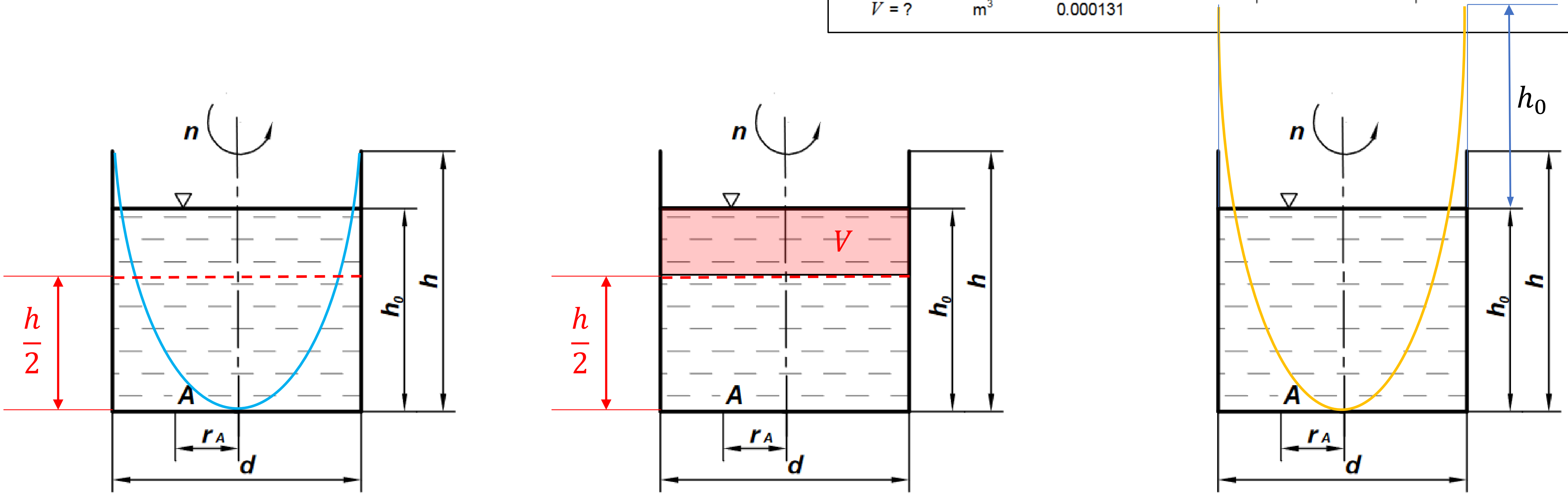
Stanovte otáčky nádoby n, při kterých se hladina $p_0 =$ *konst.* dotkne dna nádoby a nakreslete hladinovou plochu atmosférického tlaku. Vyteče zčásti kapalina z nádoby? Když ano, jaký objem V vyteče? Jaký relativní tlak p_A bude v místě A na poloměru r_A při rotaci nádoby s kapalinou?

Zadáno:

$h_0 =$	0.0667 m
$h =$	0.1 m
$d =$	0.1 m
$r_A =$	0.025 m
$\rho =$	1000 kg.m^{-3}



Vypočtěte:		Výsledky:
$H_p = ?$	m	0.10
$n = ?$	s^{-1}	4.459
$p_A = ?$	Pa	245.40
$V = ?$	m^3	0.000131



VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

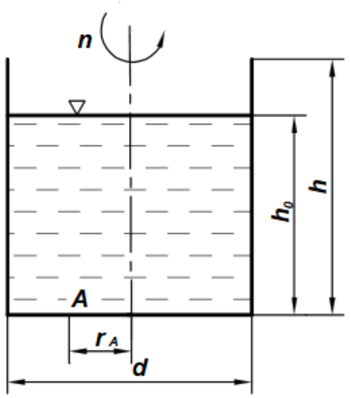
Příklad 5.2.1

Stanovte otáčky nádoby n, při kterých se hladina $p_0 =$ *konst.* dotkne dna nádoby a nakreslete hladinovou plochu atmosférického tlaku. Vyteče zčásti kapalina z nádoby? Když ano, jaký objem V vyteče? Jaký relativní tlak p_A bude v místě A na poloměru r_A při rotaci nádoby s kapalinou?

Zadáno:

$h_0 =$	0.0667 m
$h =$	0.1 m
$d =$	0.1 m
$r_A =$	0.025 m
$\rho =$	1000 kg.m^{-3}

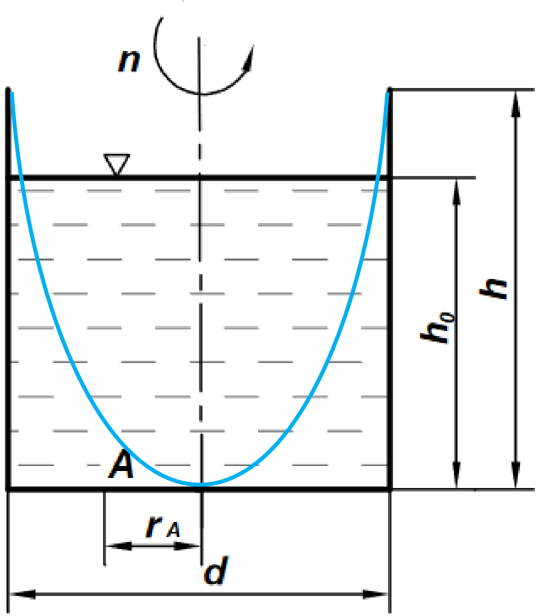
Vypočtěte:		Výsledky:
$H_p = ?$	m	0.10
$n = ?$	s^{-1}	4.459
$p_A = ?$	Pa	245.40
$V = ?$	m^3	0.000131

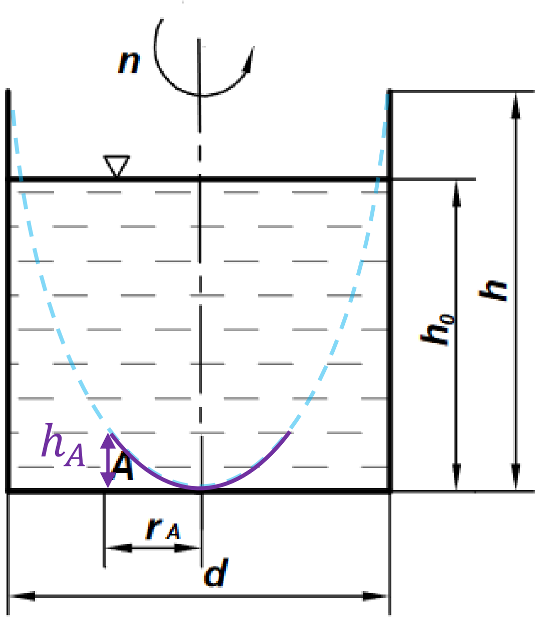


Určení otáček: výška rotačního paraboloidu $H_p = h$

$$H_p = \frac{(r \cdot \omega)^2}{2g} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H_p}{r^2}}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n \rightarrow n = \frac{\omega}{2 \cdot \pi}$$





Tlak v místě A se rovná hydrostatickému tlaku, je potřeba určit výšku aktuální hladiny h_A

$$p_A = \rho \cdot g \cdot h_A$$

Výška h_A při daných otáčkách nádoby odpovídá výšce paraboloidu na poloměru r_A

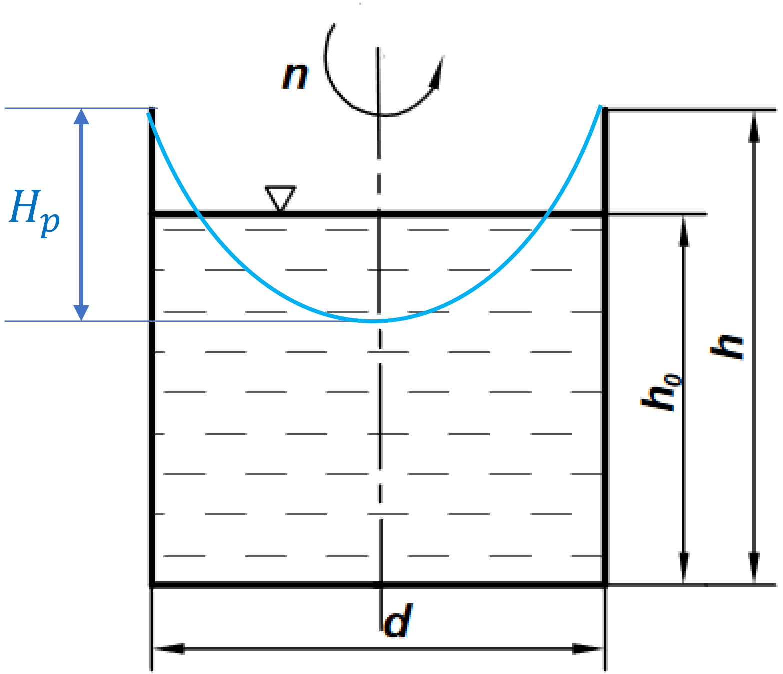
$$h_A = \frac{(r_A \cdot \omega)^2}{2g}$$

Otevřená nádoba

$$H_p = (h - h_0) \cdot 2$$

$$H_p = \frac{(r \cdot \omega)^2}{2g} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H_p}{r^2}}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n \rightarrow n = \frac{\omega}{2 \cdot \pi}$$



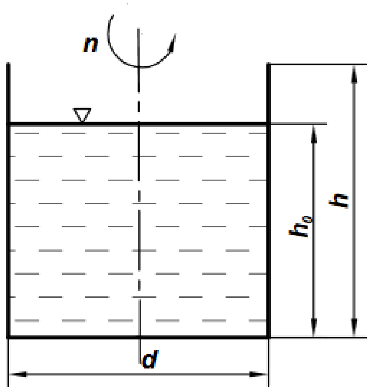
Příklad 5.2.2

Válcová nádoba o průměru d a výšce h je zaplněna kapalinou do výšky h_0 ode dna nádoby. Určete maximální otáčky, při kterých kapalina nevyteče z nádoby a jaká bude výška paraboloidu.

Zadáno:

h_0 =	6.667 cm
h =	10 cm
d =	4 cm

Vypočtěte:		Výsledky:
H_p = ?	m	0.06666
n = ?	s^{-1}	9.10066



VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Uzavřená nádoba

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n$$

$$H_p = \frac{(r \cdot \omega)^2}{2g}$$

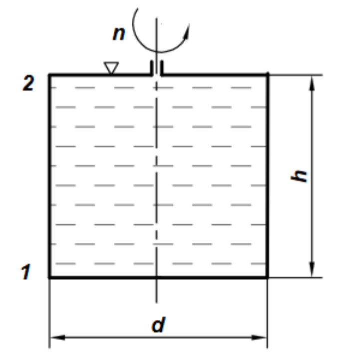
Příklad 5.2.3

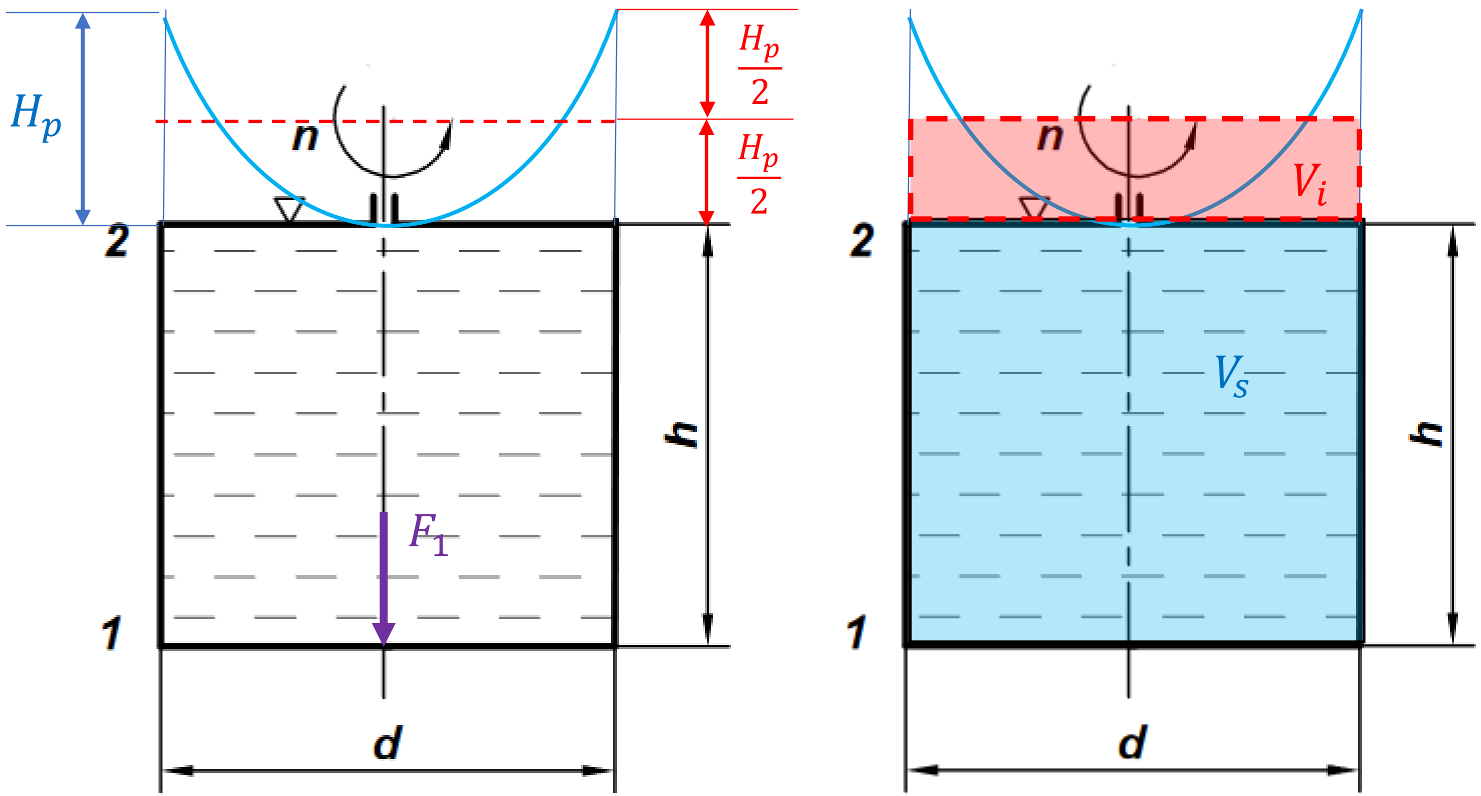
Nádoba je až po otvor naplněna vodou. Určete výšku rotačního paraboloidu hladinové plochy h_p, vypočítejte tlakovou sílu F_1 na dno a F_2 na víko nádoby, tlak p_1 a p_2 v místech *1* a *2* při rotaci nádoby otáčkami n. Nakreslete hladinovou plochu atmosférického tlaku při rotaci. Otvor ve víku je velmi malý. Vypočítejte úhlovou rychlost ω.

Zadáno:

h =	0.3 m
d =	0.2 m
n =	2 ot.s^{-1}
ρ =	1000 kg.m^{-3}

Vypočtěte:		Výsledky:
ω = ?	s^{-1}	12.57
H_p = ?	m	0.08053
F_1 = ?	N	104.87
F_2 = ?	N	12.41
p_1 = ?	Pa	3 733.00
p_2 = ?	Pa	790.00





Síla F_1 působící na dno nádoby je svislá tlaková síla. Sčítáme celý objem kapaliny nad působištěm síly (skutečný objem kapaliny v nádobě V_s + imaginární objem od rotace nádoby V_i)

$$V_y = V_s + V_i$$

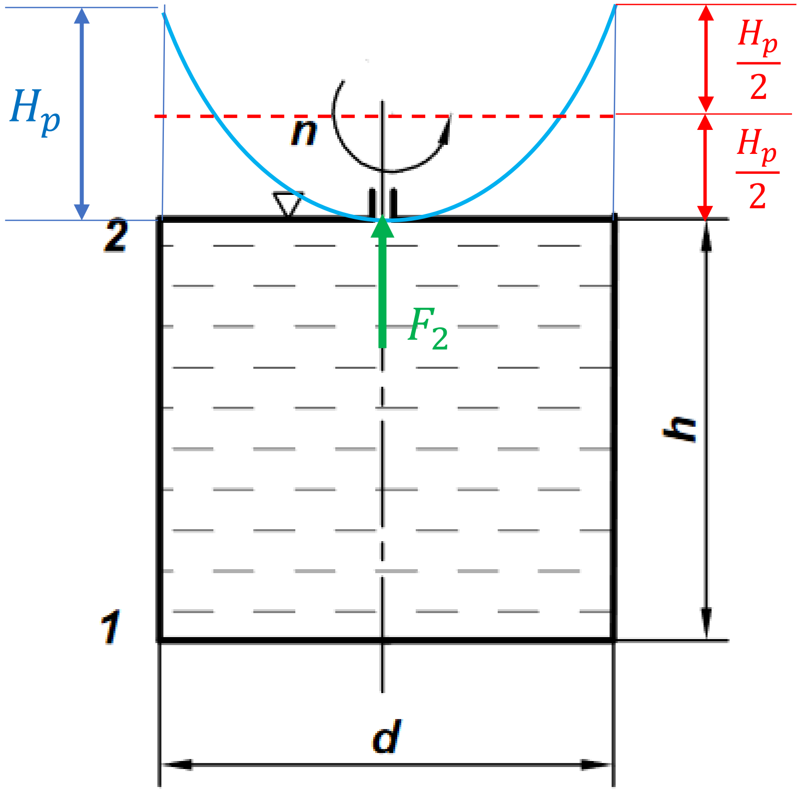
$$F_1 = \rho \cdot g \cdot V_y = \rho \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \left(h + \frac{H_p}{2}\right)$$

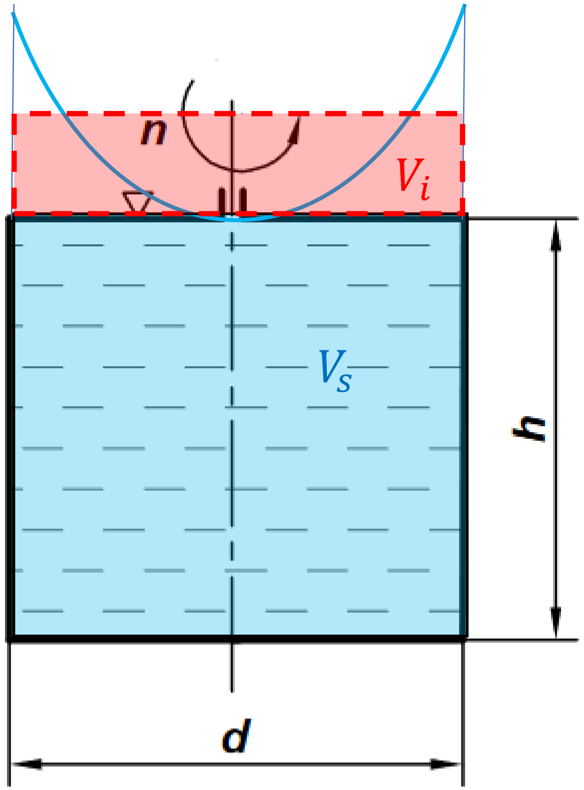
VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA STROJNÍ

Uzavřená nádoba

Síla F_2 působící na víko nádoby je svislá tlaková síla. Nad působištěm síly je pouze imaginární objem od rotace nádoby V_i.

$$F_2 = \rho \cdot g \cdot V_i = \rho \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{H_p}{2}$$





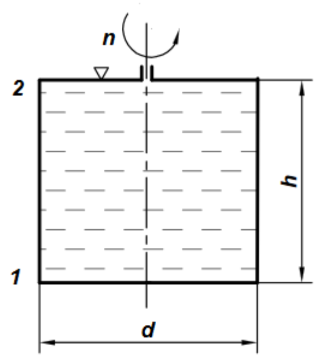
Příklad 5.2.3

Nádoba je až po otvor naplněna vodou. Určete výšku rotačního paraboloidu hladinové plochy h_p, vypočítejte tlakovou sílu F_1 na dno a F_2 na víko nádoby, tlak p_1 a p_2 v místech *1* a *2* při rotaci nádoby otáčkami n. Nakreslete hladinovou plochu atmosférického tlaku při rotaci. Otvor ve víku je velmi malý. Vypočítejte úhlovou rychlost ω.

Zadáno:

h =	0.3 m
d =	0.2 m
n =	2 ot.s^{-1}
ρ =	1000 kg.m^{-3}

Vypočtěte:		Výsledky:
ω = ?	s^{-1}	12.57
H_p = ?	m	0.08053
F_1 = ?	N	104.87
F_2 = ?	N	12.41
p_1 = ?	Pa	3 733.00
p_2 = ?	Pa	790.00



Pro výpočet tlaků se využije vtah pro výpočet hydrostatického tlaku. Musíme uvažovat výšku hladiny nad daným místem.

$$p_1 = \rho \cdot g \cdot (h + H_p)$$

$$p_2 = \rho \cdot g \cdot H_p$$